

前 言

几年来我们在南京大学数学系、南京师范大学数学系多次讲授实变函数和泛函分析这两门课程，使用了《实变函数与泛函分析概要》（郑维行、王声望）一书，并参阅了其他教材和专著（见参考文献[1]—[9]），积累了一些有一定难度的典型习题。为了帮助读者学好这两门课程，我们编写了这本学习参考书，总结了实变函数与泛函分析的基本知识，给出了各种类型的习题及其解答，并在各章中附上一定数量的练习题及解法提示，同时还收编了“南京大学攻读硕士学位研究生入学考试实变函数试题（1981—1985年）”，并作了解答，以供读者参考。

本书实变函数部分及其附录由南京师范大学马永培、姜进明和王庆福三位同志执笔，泛函分析部分由南京大学宋国柱执笔。在本书编写过程中，我们得到了郑维行教授、王声望教授和苏维宜副教授等的帮助与指教，郑维行教授还在百忙中详细审阅了本书初稿，提出了许多重要的修改意见，在此谨对他们致以衷心的感谢，并感谢南京大学出版社的同志，由于他们的关怀和支持，才有可能使本书与读者见面。

由于水平有限，整理时间仓促，错误在所难免，所做的解答也未必是最好的，我们恳切地希望读者批评指正。

编者 1987年9月

目 录

第一章	集合和点集的测度.....	(1)
第二章	可测函数和勒贝格积分.....	(44)
第三章	函数空间 L^p	(101)
第四章	距离空间和赋范线性空间.....	(139)
第五章	线性有界算子.....	(173)
第六章	希尔伯特空间及其算子.....	(241)
附 录	南京大学攻读硕士学位研究生入学考试 实变函数试题选解 (1981—1985年).....	(280)
参考文献	(299)

第一章 集合和点集的测度

一、基本概念和主要定理

集的对等 设 A, B 为两个集, 若存在 A 到 B 上的一一映射 f , 则称 A 与 B 对等, 记作 $A \sim B$.

集的势 将所有的集分类, 凡彼此对等的集归于一类, 不对等的集归于不同的类, 每一类均赋于一个标志, 称为该类中每个集的势(或基数), 集 A 的势记为 \overline{A} .

若 A 对等 B 的子集, 但 A 与 B 不对等, 则称 A 的势小于 B 的势, 记作 $\overline{A} < \overline{B}$ 或 $\overline{B} > \overline{A}$.

定理 1 (伯恩斯坦(Bernstein)定理) 若 A 对等 B 的子集(即 $\overline{A} \leq \overline{B}$), 且 B 对等 A 的子集(即 $\overline{B} \leq \overline{A}$), 则 A 与 B 对等(即 $\overline{A} = \overline{B}$).

定理 2 设 A 为集, A 的一切子集所组成的集类记为 \mathcal{A} , 则 $\overline{\mathcal{A}} > \overline{A}$.

可列集 凡与自然数集 N 对等的集, 皆称**可列集**, 可列集的势记为 \aleph_0 .

任何无限集均含有可列的子集;

可列集的任何无限子集仍是可列集;

有限个乃至可列个可列集的并集是可列集;

两个可列集 A_1, A_2 的积集

$$A_1 \times A_2 = \left\{ (x, y) \mid x \in A_1, y \in A_2 \right\} \text{ 为可列集;}$$

有理数集、平面上的有理点集皆是可列集；

连续集 凡与区间 $[0,1]$ 对等的集，皆称**连续集**，连续集的势记为 \aleph_1 ，容易证明

$$\aleph_0 < \aleph_1$$

定理 3（等势定理） 若 A 为无限集， B 为可列集或有限集，则

$$\overline{A \cup B} = \overline{A}$$

无理数集的势为 \aleph_1 ； R^1 中的任何区间， R^n 中的任何区域的势均为 \aleph_1 。

开集、闭集及其构造 设 $E \subset R^n$,

(1) 若存在点 a 的某个邻域 $U(a)$ ，使得 $U(a) \subset E$ ，则称 a 为 E 的内点；

(2) 若 E 的每点均为 E 的内点，则称 E 为开集；

(3) 若点 a 的任一邻域中均含有 E 的无限多个点，则称 a 为 E 的聚点；

(4) E 的一切聚点所成之集称为 E 的导集，记为 E' ；

(5) 若 $E' \subset E$ ，则称 E 为闭集；

(6) 若 $E \subset E'$ ，则称 E 为自密集；

(7) 若 $E' = E$ ，则称 E 为完全集。

任意个开集的并集是开集；

有限个开集的交集是开集；

任意个闭集的交集为闭集；

有限个闭集的并集为闭集；

闭集的补集是开集，开集的补集是闭集。

定理 4（一维开集的构造） 直线上任一非空开集 G 可表成至多可列个互不相交的开区间（称 G 的构成区间）之

并:

$$G = \bigcup_k (\alpha_k, \beta_k)$$

定理 5 直线上的非空闭集 F , 或是全直线, 或是从直线上挖掉至多可列个互不相交的开区间 (称 F 的余区间) 所得之集。

康托 (Cantor) 集 P_0 是势为 \aleph_1 、且不含内点的完全集。

集的序和极大元 设 X 为一集,

(1) 若在 X 中规定了某些元素之间的关系 \leq , 它满足序公理:

(i) $a \leq a$;

(ii) 若 $a \leq b, b \leq a$, 则 $a = b$;

(iii) 若 $a \leq b, b \leq c$, 则 $a \leq c$

则称 X 为带有序 \leq 的半序集。

(2) 设 X 为带有序 \leq 的半序集, 若对 X 中任何两个元素 a, b , 关系式 $a \leq b$ 与 $b \leq a$ 中必有一个成立, 则称 X 为全序集。

(3) 设 X 为半序集, X_0 为 X 的子集, 若存在 $b \in X$, 使得对一切 $x \in X_0$ 有 $x \leq b$, 则称 b 为 X_0 的上界; 又设 b 是 X_0 的上界, 如果对 X_0 的任一上界 b' , 均有 $b \leq b'$, 则称 b 为 X_0 的上确界。

(4) 设 X 为半序集, $x \in X$, 若对任一 $y \in X$, 且 $x \leq y$, 必有 $y = x$, 则称 x 为 X 的极大元。

定理 6 (佐恩(Zorn)引理) 设 X 为非空半序集, 若 X 的每一非空全序子集有上确界, 则 X 有极大元。

定理 7 (选择公理) 设 $J = \{A\}$ 是一族互不相交的非空集组成的集族, 则存在满足下面两个条件的集 E :

$$1^\circ \quad E \subset \bigcup_{A \in J} A$$

2° E 与 J 中每一个集 A 有唯一公共元素。

直线上有界点集的外测度、内测度、可测集

(1) 设有界非空开集 G 有结构表示

$$G = \bigcup_k (\alpha_k, \beta_k)$$

规定 G 的测度为: $mG = \sum_k (\beta_k - \alpha_k)$ 。

(2) 设有界闭集 $F \subset (a, b)$, 则 $G = (a, b) - F$ 为有界开集, 规定闭集 F 的测度为:

$$mF = b - a - mG$$

(3) 设 E 为有界点集, G 为包含 E 的任一开集, F 为含于 E 内的任一闭集。 E 的外测度 m^*E 与内测度 m_*E 分别定义为:

$$m^*E = \inf_{G \supset E} mG, \quad m_*E = \sup_{F \subset E} mF$$

(4) 若 $m^*E = m_*E$, 则称 E 为 (勒贝格) 可测集。 E 的测度记为 mE 。

定理 8 有界集 E 可测的充要条件是: 对任意集 A , 有 $m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A - E)$ (称为 Caratheodory 条件)

定理 9 (1) 若 E_1, E_2 可测, 且 $E_1 \subset E_2$, 则

$$m(E_2 - E_1) = mE_2 - mE_1 \quad (\text{可减性})$$

$$mE_1 \leq mE_2 \quad (\text{单调性})$$

(2) 若 $E = \bigcup_k E_k$, 每个 E_k 可测, 则 E 可测, 且

$$m \bigcup_k E_k \leq \sum_k m E_k \quad (\text{半可加性})$$

特别地, 若每个 E_k 互不相交, 则有

$$m \bigcup_k E_k = \sum_k m E_k \quad (\text{完全可加性})$$

(3) 若 $\{E_k\}$ 为可测集列, 则 $\bigcap_k E_k$ 可测;

(4) 若 $\{E_n\}$ 为渐张可测集列, 则

$$m \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \lim_{n \rightarrow \infty} m E_n$$

(5) 若 $\{E_n\}$ 为渐缩可测集列, 且 $m E_1 < \infty$, 则

$$m \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \lim_{n \rightarrow \infty} m E_n$$

由开集和闭集经过至多可列次并或交运算所得到的集统称为波雷尔(Borel)集, 特别地, 称可列个开集的并为 G_δ 集, 可列个闭集的并为 F_σ 集。

定理10 设 E 为可测集, 则存在 G_δ 集 A 与 F_σ 集 B , 满足 $A \supset E \supset B$, 且 $m E = m A = m B$ 。

直线上无界点集的测度 设 E 为一维无界集, $I_\alpha = (-\alpha, \alpha)$, 若对任何 α , $E \cap I_\alpha$ 可测, 则称 E 可测, 其测度定义为:

$$m E = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} m (E \cap I_\alpha)$$

利用选择公理和测度对平移的不变性, 可以在任何一个区间中构造出勒贝格不可测集。

R^1 中点集测度的概念可以推广到 R^n 中去。

环上的测度 设 X 是基本集, \mathcal{R} 是 X 的某些子集所成的环 (或 σ 环), 若 \mathcal{R} 上定义的集函数 μ (μ 可为无穷大) 满足

(i) $\mu \phi = 0$;

(ii) 对任何 $E \in \mathcal{R}$, $\mu E \geq 0$;

(iii) 对 \mathcal{R} 中任何互不相交的集列 $\{E_n\}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{R}$,

有
$$\mu \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n$$

则称 μ 为环 (或 σ 环) \mathcal{R} 上的测度。集 E 的 μ 测度记为 μE 。

定理11 σ 环 \mathcal{R} 上的 μ 测度具有定理9中所列的勒贝格测度 m 的那些性质。

σ 环上的外测度 设 X 是基本集, \mathcal{R}_σ 是由 X 的某些子集所成的 σ 环, λ 是定义在 \mathcal{R}_σ 上的集函数。若下列三个条件满足:

(i) $\lambda E \geq 0$ ($E \in \mathcal{R}_\sigma$), $\lambda \phi = 0$

(ii) $\lambda \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda E_n$ ($E_n \in \mathcal{R}_\sigma$)

(iii) 若 $E_1 \subset E_2$, 则 $\lambda E_1 \leq \lambda E_2$ ($E_1, E_2 \in \mathcal{R}_\sigma$)

则称 λ 为 \mathcal{R}_σ 上的外测度。(当 \mathcal{R}_σ 为 X 的一切子集所成的 σ 环时, 称 λ 为 X 上的外测度)

λ 可测集 设 λ 是 σ 环 \mathcal{R}_σ 上的外测度, 若对一切 $A \in \mathcal{R}_\sigma$, 有

$$\lambda A = \lambda(A \cap E) + \lambda(A - E)$$

则称 $E \in \mathcal{R}_\sigma$ 是 λ 可测的。

定理12 设 λ 是 σ 环 \mathcal{R}_σ 上的外测度, μ 为一切 λ 可测集类, 则

(i) μ 为 σ 环;

(ii) 设 $\{E_n\}$ 为 μ 中互不相交的集列, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 则

对任何 $A \in \mathcal{R}$, 有

$$\lambda(A \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \cap E_n)$$

(iii) λ 限制在 μ 上为测度。

测度的扩张 设 \mathcal{R} 是 X 的某些子集所成的环, μ 是 \mathcal{R} 上的测度, 则集类

$$H(\mathcal{R}) = \left\{ E \mid E \subset X, E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathcal{R} \right\}$$

是 σ 环。对 $E \in H(\mathcal{R})$, 令

$$\mu^* E = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n \mid A_n \in \mathcal{R}, \text{ 且 } E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

则 μ^* 是 σ 环 $H(\mathcal{R})$ 上的一个外测度, 称为由 μ 导出的外测度, 且当 $E \in \mathcal{R}$ 时, 有 $\mu^* E = \mu E$ 。

一切 μ^* 可测集类 μ 是 σ 环。 μ 包含由 \mathcal{R} 所产生的 σ 环 $S(\mathcal{R})$, 并且 μ^* 在 $S(\mathcal{R})$ 上的限制是 μ 的扩张。对 σ 有限的测度来说, 这种扩张还是唯一的。

二、例题、习题与解法

1. 证明下列关系:

$$(i) (A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$$

$$\begin{aligned} \text{证法一} \quad x \in (A - B) \cap (C - D) &\Leftrightarrow x \in A - B \text{ 且 } x \in C - D \\ &\Leftrightarrow x \in A, x \notin B, x \in C, x \notin D \Leftrightarrow x \in A \cap C, \\ &x \notin B \cup D \Leftrightarrow x \in (A \cap C) - (B \cup D) \end{aligned}$$

于是, 所给等式成立。

$$\begin{aligned} \text{证法二} \quad (A - B) \cap (C - D) &= (A \cap \complement B) \cap (C \cap \complement D) \\ &= (A \cap C) \cap (\complement B \cap \complement D) \end{aligned}$$

$$= (A \cap C) \cap \mathcal{C}(B \cup D) = (A \cap C) - (B \cup D)$$

$$(ii) (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$\text{证 } x \in (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ 或 } x \in C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ 且 } x \in B, \text{ 或 } x \in C \Leftrightarrow x \in A \cup C \text{ 且 } x \in B \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

于是, 所给等式成立。

$$(iii) A - (B - C) \subset (A - B) \cup C$$

$$\text{证法一 } x \in A - (B - C) \Rightarrow x \in A, x \notin B - C$$

$$\Rightarrow x \in A, x \notin B \text{ 或 } x \in A, x \in B, x \in C$$

$$\Rightarrow x \in A - B \text{ 或 } x \in C \Rightarrow x \in (A - B) \cup C$$

由 x 的任意性, 包含关系得证。

$$\text{证法二 } A - (B - C) = A \cap \mathcal{C}(B \cap \mathcal{C}C)$$

$$= A \cap (\mathcal{C}B \cup C) = (A \cap \mathcal{C}B) \cup (A \cap C)$$

$$\subset (A \cap \mathcal{C}B) \cup C = (A - B) \cup C$$

$$(iv) (A - B) - (C - D) \subset (A - C) \cup (D - B)$$

$$\text{证 } (A - B) - (C - D) = (A \cap \mathcal{C}B) \cap \mathcal{C}(C \cap \mathcal{C}D)$$

$$= (A \cap \mathcal{C}B) \cap (\mathcal{C}C \cup D)$$

$$= (A \cap \mathcal{C}B \cap \mathcal{C}C) \cup (A \cap \mathcal{C}B \cap D)$$

$$\subset (A \cap \mathcal{C}C) \cup (\mathcal{C}B \cap D) = (A - C) \cup (D - B)$$

(v) 问 $(A - B) \cup C = A - (B - C)$ 成立的充要条件是什么?

解 由(iii)知, 等式右边 $= (A - B) \cup (A \cap C)$, 左边 $= (A - B) \cup C$, 可见 $A \cap C = C$, 即 $C \subset A$ 是等式成立的充分条件。

下证 $C \subset A$ 也是等式成立的必要条件。

用反证法, 假设 $C \not\subset A$, 则有 $x \in C$ 且 $x \notin A$, 从而 $x \notin A$

$-B$ 且 $x \in A \cap C$, 于是, $x \in (A - B) \cup (A \cap C)$ 。而 $x \in (A - B) \cup C$, 故等式不成立。

2. 设给出集 E 与任意一组集 A_α , $\alpha \in I$, 问关系式

$$E \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (E \cup A_\alpha)$$

是否恒成立?

解 上式恒成立。事实上,

$$x \in \text{左边} \Rightarrow x \in E \text{ 或 } x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \Rightarrow x \in E$$

$$\text{或 } x \in A_\alpha (\forall \alpha \in I) \Rightarrow x \in E \cup A_\alpha (\forall \alpha \in I)$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (E \cup A_\alpha) \Rightarrow x \in \text{右边};$$

反之, $x \in \text{右边} \Rightarrow x \in E \cup A_\alpha (\forall \alpha \in I)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{若 } x \in E, \text{ 则 } x \in E \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \\ \text{若 } x \notin E, \text{ 则 } x \in A_\alpha (\forall \alpha \in I), \text{ 从而 } x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \end{cases}$$

$\Rightarrow x \in \text{左边}。$

3. 试作下列各题中集合间的一一对应:

(i) $[0, 1]$ 与 $(0, 1)$;

(ii) $[a, b]$ 与 $(-\infty, \infty)$;

(iii) 开上半平面与单位圆。

解 (i) 设 $(0, 1)$ 中的有理点的全体为 $\{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$, 则 $[0, 1]$ 中的有理点的全体为 $\{0, 1, r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$, 作对应:

$$0 \longleftrightarrow r_1, \quad 1 \longleftrightarrow r_2, \quad r_1 \longleftrightarrow r_3, \quad \dots, \quad r_n \longleftrightarrow r_{n+2}, \quad \dots$$

再让 $(0, 1)$ 中的无理点与 $[0, 1]$ 中的无理点自身对应, 这样就建立了 $[0, 1]$ 与 $(0, 1)$ 间的一一对应。

(ii) 先建立 $[a, b]$ 与 (a, b) 间的一一对应 (方法同

(i)), 再作 (a, b) 到 $(-\infty, \infty)$ 的映射:

$$y = \operatorname{tg} \left(\frac{x-b}{b-a} + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad x \in (a, b)$$

这样就建立了 $[a, b]$ 与 $(-\infty, \infty)$ 间的一一对应。

(iii) 据复变函数的知识, 映射 $w = \frac{Z-i}{iZ-1}$ 实现了开上半平面与单位圆间的一一对应。

4. 下列各集能否同自然数集或 $[0, 1]$ 构成一一对应:

(i) 以有理数为端点的区间集;

(ii) 闭正方形 $[0, 1; 0, 1]$ 。

如果可能, 试作这种对应方法。

解 (i) 以有理数为端点的区间集能同自然数集构成一一对应, 方法如下:

设有理数的全体为 $\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$, A_{ij} 表示以 a_i 和 a_j ($a_i < a_j$) 为端点的区间, 则以有理数为端点的区间全体为

$$\begin{array}{ccccccc} A_{12}, & A_{13}, & A_{14}, & A_{15}, & \dots \\ & A_{23}, & A_{24}, & A_{25}, & \dots \\ & & A_{34}, & A_{35}, & \dots \\ & & & A_{45}, & \dots \\ & & & & \dots \end{array}$$

将这些区间排列成: $A_{12}, A_{13}, A_{23}, A_{14}, A_{24}, A_{34}, \dots$, 便建立了以有理数为端点的区间集与自然数集的一一对应。

(ii) 闭正方形 $[0, 1; 0, 1]$ 与 $[0, 1]$ 能构成一一对应, 方法如下:

把闭正方形分解为互不相交的三部分:

$$A = \{(x, y): 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1\}$$

$$B = \{(0, y): 0 \leq y \leq 1\} \quad C = \{(x, 0): 0 < x \leq 1\}$$

①首先建立 $A = \{(x, y): 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1\}$ 与半闭区间 $(0, 1]$ 的一一对应。

若把从某一位起后面全是 0 的二进小数叫做二进有限小数，否则称二进无限小数，那么， $(0, 1]$ 中的实数与二进无限小数是一一对应的。

对二进无限小数 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ (有无穷多个 a_i 为 1)，我们这样给它加括号，使得每个括号中只有最后一个数码为 1，前面的数码全为 0。例如，二进无限小数

$$0.1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ \cdots$$

加括号成 $0.(1)(01)(1)(0001)(001)\cdots$ ，记作为

$$0.\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\cdots$$

显然，每个二进无限小数，均可加括号成为一个这样的符号序列 $0.\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n\cdots$ ；反之，每个这样的符号序列均可去掉括号成为一个二进无限小数。

对每个 $(x, y) \in A$ ，把 x, y 均表为二进无限小数，并加括号成符号序列：

$$x = 0.\sigma'_1\sigma'_2\cdots\sigma'_n\cdots \quad y = 0.\sigma''_1\sigma''_2\cdots\sigma''_n\cdots$$

令 $t = 0.\sigma'_1\sigma''_1\sigma'_2\sigma''_2\cdots\sigma'_n\sigma''_n\cdots$ ，再去掉这个符号序列的括号，便得到一个二进无限小数，从而确定了一个实数 $t \in (0, 1]$ 。

反之，对于每个 $t \in (0, 1]$ ，把 t 表为二进无限小数，并加括号成符号序列：

$$t = 0.\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n\cdots$$

令 $x = 0.\sigma_1\sigma_3\cdots\sigma_{2n-1}\cdots$ ， $y = 0.\sigma_2\sigma_4\cdots\sigma_{2n}\cdots$ ，并去掉

这两个符号序列的括号，便得到两个二进无限小数，从而确定了一点 $(x, y) \in A$ 。

②建立闭正方形在 y 轴上的点集 $B = \{(0, y): 0 \leq y \leq 1\}$ 与区间 $[-1, 0]$ 的一一对应。

这是容易的，只要令 $y = t + 1, t \in [-1, 0]$ ；

③建立 $C = \{(x, 0): 0 < x \leq 1\}$ 与区间 $(1, 2]$ 的一一对应。

这也是容易的，只要令 $x = t - 1, t \in (1, 2]$ 。

综合①②③，我们建立了闭正方形 $[0, 1; 0, 1]$ 与闭区间 $[-1, 2]$ 的一一对应，再作 $[-1, 2]$ 到 $[0, 1]$ 的线性映射 $y = -\frac{1}{3}(x + 1), x \in [-1, 2]$ 就完成了。

5. 证明整系数多项式全体是可列集。

证 设 n 次整系数多项式为

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

由整数集 Z 的可列性知零次整系数多项式的全体 $P_0 = \{p_0(x) = a_0, a_0 \in Z\}$ 为可列集。又据可列个可列集之并为可列集，可知一次整系数多项式的全体

$$P_1 = \{p_1(x) = a_0 + a_1x: a_0, a_1 \in Z, a_1 \neq 0\}$$

为可列集。依此由数学归纳法可证得 n 次整数多项式全体 P_n 为可列集，而一切整系数多项式所成之集 P 又是可列个可列集之并：

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$$

从而是可列的。

6. 设 $A = \{0, 1\}$ ，试证一切排列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots), a_n \in A$ 所成的集的势为 \aleph_1 。

证 把一切排列与二进小数作对应:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \longleftrightarrow 0.a_1a_2\dots a_n\dots$$

$$a_n \in A = \{0, 1\}$$

因二进小数 $\{0.a_1a_2\dots a_n\dots : a_n \in A\}$ 与 $[0, 1]$ 对等, 故其势为 \aleph , 从而一切排列的势为 \aleph .

7. 设 $C[0, 1]$ 表示 $[0, 1]$ 上一切连续函数所成的类, 试证它的势为 \aleph .

证 先证明全体实数列所成之集 H 对等于 $(0, 1)$.

设 H 的子集

$$B = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : x_n \in (0, 1), n = 1, 2, \dots\}$$

作 B 到 H 的映射 ϕ :

$$\phi(x) = \left(\operatorname{tg} \left(x_1 - \frac{1}{2} \right) \pi, \operatorname{tg} \left(x_2 - \frac{1}{2} \right) \pi, \dots, \right. \\ \left. \operatorname{tg} \left(x_n - \frac{1}{2} \right) \pi, \dots \right)$$

显然 ϕ 是 B 到 H 的一对一映射, 故 $H \sim B$.

下证 $B \sim (0, 1)$.

首先, 把 $(0, 1)$ 中的任一数 x 与 B 中的元 (x, x, \dots, x, \dots) 对应, 便知 $(0, 1)$ 对等于 B 的一个子集.

反之, 对 B 中任何 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, 用十进无限小数表示 x_n :

$$x_1 = 0.x_{11}x_{12}\dots x_{1n}\dots$$

$$x_2 = 0.x_{21}x_{22}\dots x_{2n}\dots$$

.....

$$x_n = 0.x_{n1}x_{n2}\dots x_{nn}\dots$$

.....

作无限小数 $\psi(x) = 0.x_{11}x_{21}x_{12}\cdots x_{n1}x_{n-1,2}\cdots x_{1n}\cdots$, 显然, $\psi(x) \in (0, 1)$, 且当 $x \neq y$ 时, $\psi(x) \neq \psi(y)$, 故 B 对等于 $(0, 1)$ 的一个子集, 于是由 Bernstein 定理知 $B \sim (0, 1)$, 从而

$$\overline{\overline{H}} = \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{(0, 1)}} = \aleph_s$$

现在来证明 $C[0, 1]$ 的势为 \aleph_s .

事实上, 因一切常数函数 $f(x) = k$ 为 $[0, 1]$ 的连续函数, $\overline{\overline{C[0, 1]}} \geq \aleph_s$ 是明显的。另一方面, 把 $[0, 1]$ 中全体有理数排列成 r_1, r_2, r_3, \dots , 对于 $C[0, 1]$ 中任一个 $f(x)$, 令实数列 $(f(r_1), f(r_2), f(r_3), \dots)$ 与之对应, 由函数的连续性可知, 不同的函数对应的实数列也不同(若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 中一切有理点上取值相同的话, 便能由函数的连续性推得 $f(x) = g(x)$)。于是 $C[0, 1]$ 对等于全体实数列 H 的一个子集, 故有 $\overline{\overline{C[0, 1]}} \leq \overline{\overline{H}} = \aleph_s$.

据 Bernstein 定理, $\overline{\overline{C[0, 1]}} = \aleph_s$.

8. 证明任何点集的内点全体是开集。

证 设 E 为任一点集, E^0 为 E 的内点所成之集。任设 $x_0 \in E^0$, 则 x_0 为 E 之内点, 故有 (α, β) , 使得 $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset E$.

对于任意的 $x \in (\alpha, \beta)$, 显然 (α, β) 是 x 的邻域, 因此, x 为 E 之内点, 即 $x \in E^0$, 从而 $(\alpha, \beta) \subset E^0$.

综上, 对 E^0 中的任一点 x_0 , 有 (α, β) , 使得 $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset E^0$. 于是, x_0 为 E^0 的内点, E^0 为开集。

9. 设 G_1, G_2 是 R_1 中的开集, 且 $G_1 \subset G_2$, 试证 G_1 的每个构成区间必含在 G_2 的某个构成区间之中。

证 设 (α_1, β_1) 是 G_1 的任一构成区间, $x \in (\alpha_1, \beta_1)$, 又设 G_2 中含 x 的构成区间是 (α_2, β_2) 。现证 $(\alpha_1, \beta_1) \subset$

(α_2, β_2) .

用反证法, 假设 $\alpha_1 < \alpha_2$, 由于 $\alpha_2 \leq x$, 有 $\alpha_2 \in (\alpha_1, x) \subset (\alpha_1, \beta_1) \subset G_1 \subset G_2$, 这是不可能的 (因 (α_2, β_2) 是 G_2 的构成区间, $\alpha_2 \notin G_2$), 于是 $\alpha_1 \geq \alpha_2$.

同理可证 $\beta_1 \leq \beta_2$. 因而 $(\alpha_1, \beta_1) \subset (\alpha_2, \beta_2)$

10. 设 F_1, F_2 是 R^n 中闭集, 且 $F_1 \cap F_2 = \phi$, 试证存在开集 G_1, G_2 , 使 $G_1 \cap G_2 = \phi$, 而 $G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2$.

证法一 因 $F_1 \cap F_2 = \phi, F_1, F_2$ 为闭集, 则对 $x \in F_1$, 有 $\rho(x, F_2) > 0$; 对 $y \in F_2$, 有 $\rho(y, F_1) > 0$. 作开邻域 $O(x, r(x))$ 与 $O(y, r(y))$, 其中, $r(x) = \frac{1}{2} \rho(x, F_2)$, $r(y) = \frac{1}{2} \rho(y, F_1)$. 再令

$$G_1 = \bigcup_{x \in F_1} O(x, r(x)), \quad G_2 = \bigcup_{y \in F_2} O(y, r(y))$$

显然, G_1, G_2 都是开集, 且 $G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2$. 下证 $G_1 \cap G_2 = \phi$. 假设不然, 则有 $a \in G_1 \cap G_2$, 即 $a \in G_1$ 且 $a \in G_2$, 则必存在 $x_0 \in F_1, y_0 \in F_2$, 使得

$$a \in O(x_0, r(x_0)) \text{ 且 } a \in O(y_0, r(y_0))$$

不妨设 $r(x_0) \geq r(y_0)$, 则

$$\begin{aligned} \rho(x_0, F_2) &\leq \rho(x_0, y_0) \leq \rho(x_0, a) + \rho(a, y_0) \\ &< r(x_0) + r(y_0) \leq 2r(x_0) = \rho(x_0, F_2) \end{aligned}$$

这是荒谬的, 于是结论得证。

证法二 作 R^n 到 R 的连续函数:

$$f(x) = \frac{\rho(x, F_1)}{\rho(x, F_1) + \rho(x, F_2)}$$

则 $f(F_1) = 0, f(F_2) = 1$, 即 $F_1 = f^{-1}(0), F_2 = f^{-1}(1)$.

现令

$$G_1 = f^{-1}((-\infty, \frac{1}{2})), G_2 = f^{-1}((\frac{1}{2}, +\infty))$$

由连续函数的性质, 开集的原象是开集, 知 G_1, G_2 均为开集, 且显然有

$$G_1 \cap G_2 = \phi, G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2$$

11. 设 $f(x)$ 是 R^1 上的实函数, f 映开集为开集。问 f 是否连续? 又连续映射是否映开集为开集?

解 映开集为开集的实函数不一定连续。例如, 在每个区间 $[n, n+1]$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 上作康脱三分集 P_n , 令

$$G_n = [n, n+1] - P_n, P = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} P_n, G = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} G_n$$

则 G 为开集。设 G 的构成区间为 (a_K, b_K) , $K=1, 2, \dots$, 在 R^1 上定义函数

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} - \frac{b_K - x}{b_K - a_K} \right) \pi & x \in (a_K, b_K), K=1, 2, \dots \\ 0 & x \in P \end{cases}$$

显然, 函数 f 在 P 的一切点上不连续, 但 f 在 R^1 上映开集为开集。事实上, 设 E 为 R^1 中任一开集, $E = \bigcup_i (a_i, \beta_i)$, 由于 P 不含任何区间, $(a_i, \beta_i) \subset P$ 的情形是不可能发生的, 因此只有两种可能: ① $E \subset G$; ② E 的某些构成区间既含有 G 的点又有 P 的点。

①当 $E \subset G$ 时, 由本章题9, 对任何 E 的构成区间 (a_i, β_i) , 必有 $(a_i, \beta_i) \subset (a_K, b_K)$ (其中 (a_K, b_K) 为 G 的某个构成区间)。据函数的定义, f 映 (a_i, β_i) 为开区间 $\left(\operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} - \frac{b_K - a_i}{b_K - a_K} \right) \pi, \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} - \frac{b_K - \beta_i}{b_K - a_K} \right) \pi \right)$,

因可列个开区间之并为开集, 便知 f 映开集 E 为开集。

②当 E 的构成区间 (α_i, β_i) 既含有 G 的点且又有 F 的点时, 由康托集的构造知, 区间 (α_i, β_i) 必含有 G 的构成区间, 于是 f 映 E 为开集 R^1 。

至于连续映射不一定映开集为开集的例子是容易举的。比如 $f(x) = \sin x$, 在 R^1 上连续, 但映开集 $(0, 4\pi)$ 为闭集 $[-1, 1]$ 。

12. 设 E 是康托集的补集的构成区间的中点所成的集, 求 E' 。

解 记康托集为 P_0 , 其补集为 G_0 。

若 $x \in G_0$, 则 x 必属于 G_0 的某一构成区间 (α_i, β_i) 。由于在 x 的邻域 (α_i, β_i) 中, 只有一点 $\frac{\alpha_i + \beta_i}{2} \in E$, 故 x 不可能是 E 的聚点。

若 $x \in P_0$, 由康托集的构造知, x 的任一邻域 $O(x, \varepsilon)$ 必含有 G_0 的某个构成区间 (α_i, β_i) , 于是必有 E 的点 $\frac{\alpha_i + \beta_i}{2} \in O(x, \varepsilon)$, 故 x 为 E 的聚点。

综上便得 $E' = P_0$ 。

13. 设点集列 $\{E_n\}$ 是有限区间 $[a, b]$ 中的渐缩序列:
 $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, 且每个 E_n 均为非空闭集。试证交集 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ 非空。

证法一 在每个 E_n 中各取一点 x_n , 则 $\{x_n\}$ 为有界点列, 于是存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 设 $x_{n_k} \rightarrow x_0$, 则对任何 n , 当 $n_k > n$ 时, $x_{n_k} \in E_{n_k} \subset E_n$, 故 x_0 为 E_n 的聚点。由 E_n 为闭集知 $x_0 \in E_n$, 因而 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, 这就证明了 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ 非空。

证法二 反设 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \phi$, 以 $(a-1, b+1)$ 为基本集,

对每个 E_n 取补, 则渐张开集序列 $\{C E_n\}$ 复盖 $[a, b]$, 于是存在有限个开集 $C E_{n_1}, C E_{n_2}, \dots, C E_{n_K}$ 复盖 $[a, b]$, 不妨设 $n_1 < n_2 < \dots < n_K$, 则有

$$C E_{n_K} = \bigcup_{i=1}^K C E_{n_i} \supset [a, b]$$

注意到 $E_{n_K} \subset [a, b]$, 便知 $E_{n_K} = \phi$, 这与 E_n 均非空相矛盾。

14. 试证欧几里得空间 R^n 中每个闭集可表为可列个开集之交, 每个开集可表为可列个闭集的并。

证 先证明一个重要结论: 对任意集 $A \subset R^n, d > 0$, 点集

$$G = \{a: \rho(a, A) < d\}$$

必为开集。

事实上, $\forall x \in G$, 有 $\rho(x, A) < d$, 令 $h = d - \rho(x, A)$, 则 $O(x, \frac{h}{2}) \subset G$, 故 x 为 G 之内点, 从而 G 为开集, 且显然有 $G \supset A$ 。

现证前半题。设 F 为闭集, 令 $G_n = \{a: \rho(a, F) < \frac{1}{n}\}$, ($n = 1, 2, \dots$), 由上述可知, G_n 为开集, 且 $G_n \supset F$. 下证 $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. 事实上, $\forall x \in F$, 有 $\rho(x, F) = 0 < \frac{1}{n}$ ($n =$

$1, 2, \dots$), 于是 $x \in G_n$ ($n = 1, 2, \dots$), $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. 反之, $\forall x \in$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, 则 $x \in G_n$ ($n = 1, 2, \dots$), $\rho(x, F) < \frac{1}{n}$ ($n = 1,$

$2, \dots$). 令 $n \rightarrow \infty$, 得 $\rho(x, F) = 0$, 因 F 为闭集, 知 $x \in F$.

再证后半题。设 G 为开集，则 $\mathcal{C}G$ 为闭集，由前半题有

$$\mathcal{C}G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \text{ (其中 } G_n \text{ 为开集)}$$

于是

$$G = \mathcal{C} \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}G_n \text{ (其中 } \mathcal{C}G_n \text{ 显然为闭集)}$$

[注] 在 R^1 中，用下法证明较为简单：

先设 G 为开集， G 的结构表示为 $G = \bigcup_K (\alpha_K, \beta_K)$ 。对每个

开区间 (α_K, β_K) ，有 $(\alpha_K, \beta_K) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha_K + \frac{1}{n}, \beta_K - \frac{1}{n}]$ 。

于是

$$G = \bigcup_K \bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha_K + \frac{1}{n}, \beta_K - \frac{1}{n}]$$

再设 F 为闭集，则 $\mathcal{C}F$ 为开集，由上述已证的结果，有

$$\mathcal{C}F = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m \text{ (其中 } F_m \text{ 为闭集)}$$

于是

$$F = \mathcal{C} \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{C}F_m \text{ (其中 } \mathcal{C}F_m \text{ 显然是开集)}$$

15. 称 X 的子集所成之类 \mathcal{A} 有性质 (σ) ：若 X 非 \mathcal{A} 中有限个元的并。试证：若 \mathcal{A} 有性质 (σ) 时，则存在 X 的子集的极大类 \mathcal{B} 具有性质 (σ) 且包含 \mathcal{A} ，并证明，若 $A_1, A_2, \dots, A_n \subset X$ ，且 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{B}$ ，则必有某个 $A_i \in \mathcal{B}$ 。

证 (1) 设具有性质 (σ) 且包含 \mathcal{A} 的 X 的一切子集类所成之集为 X_0 ：

$$X_0 = \{\mathcal{D} : \mathcal{D} \supset \mathcal{A}, \text{ 且 } X \text{ 非 } \mathcal{D} \text{ 中有限个元的并}\}$$

题目的意思就是要证明 X_0 有极大元 \mathcal{B} 。

显然, X_0 中元按平常集的包含关系成一非空半序集, 对 X_0 中任一全序子集 $\{\mathcal{D}_\alpha\}$, 令 $\mathcal{D}_0 = \bigcup_\alpha \mathcal{D}_\alpha$, 下证 \mathcal{D}_0 为 $\{\mathcal{D}_\alpha\}$ 的上确界。

对于每个 \mathcal{D}_α , $\mathcal{D}_\alpha \subset \mathcal{D}_0$ 是显然的, 只要证 $\mathcal{D}_\alpha \in X_0$ 就行了。首先有 $\mathcal{D}_0 \supset \mathcal{A}$, 其次 \mathcal{D}_0 有性质 (σ) , 若不然, 则有 \mathcal{D}_0 的有限个元 A_1, A_2, \dots, A_m , 使 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m = X$, 设 $A_1 \in \mathcal{D}_{\alpha_1}, A_2 \in \mathcal{D}_{\alpha_2}, \dots, A_m \in \mathcal{D}_{\alpha_m}$, 由于 $\{\mathcal{D}_\alpha\}$ 为全序集且 m 为有限, 故这 m 个 \mathcal{D}_α 中必有一个 \mathcal{D}_{α_K} 包含其余的 $m-1$ 个, 于是 A_1, A_2, \dots, A_m 均属于 \mathcal{D}_{α_K} , 这与 \mathcal{D}_{α_K} 具有性质 (σ) 相矛盾。

这就证明了 $\{\mathcal{D}_\alpha\}$ 有上确界, 从而由 Zorn 引理知 X_0 是极大元。

(2) 反设 A_1, A_2, \dots, A_n 均不属于 \mathcal{B} , 则 $\mathcal{B} \cup \{A_1\}, \mathcal{B} \cup \{A_2\}, \dots, \mathcal{B} \cup \{A_n\}$ 中至少有一个具有性质 (σ) 。若不然, 则有

$$X = B_{i_1} \cup B_{i_2} \cup \dots \cup B_{i_{k_i}} \cup A_i$$

(各 $B_{i_{k_i}}$ 为 \mathcal{B} 的元, $i = 1, 2, \dots, n$)

上式对 $i = 1, 2, \dots, n$ 作交, 可得

$$X = \bigcup_{i=1}^n (B_{i_1} \cup B_{i_2} \cup \dots \cup B_{i_{k_i}}) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

因 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{B}$, 且每个 $B_{i_{k_i}} \in \mathcal{B}$, 上式说明 X 是 \mathcal{B} 中有限个元之并, 这与 \mathcal{B} 具有性质 (σ) 相矛盾。

现设 $\mathcal{B} \cup \{A_k\}$ 具有性质 (σ) , 又 $\mathcal{B} \cup \{A_k\} \supset \mathcal{B} \supset \mathcal{A}$, 故 $\mathcal{B} \cup \{A_k\} \in X_0$, 这与 \mathcal{B} 是 X_0 的极大元相矛盾, 于是有某个 $A_i \in \mathcal{B}$ 。

16. 试以 Zorn 引理证 Zermelo 公理。

证 设 $X = \bigcup A (A \in \mathcal{A}, \mathcal{A} \text{ 中各集两两互不相交})$, \mathcal{B} 为含于 X 中且与每个 $A \in \mathcal{A}$ 至多有一公共元的集所成的类:

$$\mathcal{B} = \{B: B \subset X, \text{ 且与每个 } A \in \mathcal{A} \text{ 至多有一公共元}\}$$

显然 \mathcal{B} 按“包含”关系成一非空半序集。再令 \mathcal{D} 为 \mathcal{B} 的任一非空全序子集, $E_0 = \bigcup E (E \in \mathcal{D})$, 下证 $E_0 \in \mathcal{B}$ 。

$E_0 \subset X$ 是显然的。假设 E_0 与某个 $A \in \mathcal{A}$ 有两个公共元 x_1, x_2 , 则有 $E_1, E_2 \in \mathcal{D}$, 使 $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$ 。因 \mathcal{D} 是全序集, 不妨设 $E_1 \subset E_2$, 则 $x_1, x_2 \in E_2$, 即 E_2 与 \mathcal{A} 中某个 A 有两个公共元, 这与 $E_2 \in \mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ 相矛盾, 因此 E_0 与 \mathcal{A} 中每个元至多有一公共元。从而 E_0 为 \mathcal{D} 的上确界。据 Zorn 引理, \mathcal{B} 有极大元, 设为 M 。

现在证明 M 与每个 $A \in \mathcal{A}$ 必有一个公共元, 若不然, 则有某个 $A \in \mathcal{A}$, 使 $M \cap A = \emptyset$ 。取 $a \in A$, 因 \mathcal{A} 中各集互不相交, 知 $M \cup \{a\}$ 与每个 $A \in \mathcal{A}$ 至多有一公共元, 故 $M \cup \{a\} \in \mathcal{B}$, 且以 M 为其真子集, 这与 M 是 \mathcal{B} 的极大元矛盾了。

综上知, M 与每个 $A \in \mathcal{A}$ 有且仅有一个公共元 a 。对于每个 $A \in \mathcal{A}$, 令 $f(A) = a$, 则 f 就是所求的映射:

$$f: \mathcal{A} \rightarrow \bigcup A \quad A \in \mathcal{A}, \text{ 且 } f(A) = a \in A, \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

17. 设 \mathcal{A} 是由给定的集的子集所成的类: $A \in \mathcal{A}$ 指的是 A 的每一有限子集属于 \mathcal{A} , 试证 \mathcal{A} 含有一极大元。

证 设 $\{A_\alpha\}$ 是 \mathcal{A} 的任一全序子集, 令 $A_0 = \bigcup_{\alpha} A_\alpha$, 下证 $A_0 = \sup\{A_\alpha\}$, 对于 $\{A_\alpha\}$ 中的每一元, $A_\alpha \subset A_0$ 是明显的, 因此只要证明 $A_0 \in \mathcal{A}$ 就行了。设 $A_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 为 A_0 的任一有限子集, 则有 $\{A_\alpha\}$ 中的 A_{α_1} , 使得 $a_i \in A_{\alpha_i}$

($i = 1, 2, \dots, n$)。由 $\{A_\alpha\}$ 的全序性知 a_1, a_2, \dots, a_n 均属于某个 A_{α_i} ，于是由 $A_{\alpha_i} \in \mathcal{A}$ 知 $A_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \in \mathcal{A}$ 。故由Zorn引理， \mathcal{A} 含有一极大元。

18. 试证：设 X 为非空半序集，若 X 中每一非空全序子集有上界，则 X 有极大元（Zorn引理的另一形式）。

证 和参考文献[1]第一章定理6.5的证法相同，仅需将“ $x_0 = \sup X_0$ ”改为“ x_0 是 X_0 的上界。”

19. (1) 设 E 是坐标平面上曲线 $y = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

上一切点所成之集，求 E' 。

(2) $E = \left\{ p + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} : p \in N, m \in N, n \in N \right\}$ ，求

E', E'', E''' 。

答：(1) $E' = E \cup \{(x, y) : x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$

(2) $E' = \left\{ p + \frac{1}{m} : p \in N, m \in N \right\}$,

$E'' = N, E''' = \phi.$

20. 证明：直线上既开又闭的集合只有 ϕ 与 R 。

提示 可用反证法。

21. (1) 若非空点集 A 的每一点均为孤立点，称 A 为孤立点集。孤立点集是否至多可列？

(2) 孤立点集的导集能否为不可列集？

(3) 直线上是否存在这样的点集 E ，使得 $E' = (0, 1)$ ？

(4) 设开集 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n)$, 是否恒有

$$G' = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n]$$

答: (1) 孤立点集至多可列。

(2) 能, 如康脱开集 G_0 的构成区间的中点所成之集 E (参见第12题)。

(3) 不存在。

(4) 未必, 如 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right)$ 。

22. 设 A, B 均为非空闭集, 且至少有一个有界, 则必有 $a \in A, b \in B$, 使 $\rho(a, b) = \rho(A, B)$ 。

提示 据 $\rho(A, B)$ 的定义, 对每个自然数 n , 有 $x_n \in A, y_n \in B$, 使 $\rho(A, B) \leq \rho(x_n, y_n) < \rho(A, B) + \frac{1}{n}$ 。设 A 有界, 则 $\{x_n\}$ 有子列 $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \rightarrow a$, 再证明相应的 $\{y_{n_k}\}$ 为有界点列, 于是有 $\{y_{n_k}\}$ 的子序列 $y_{n'_k} \rightarrow b$ 。

23. (1) 集 E 的一切内点所成之集 $\overset{\circ}{E}$ 是含于 E 内的一切开集之并。

(2) 集 E 的闭包 \overline{E} 是包含 E 的一切闭集之交。

24. (1) 开区间 (a, b) 不能表为可列个不相交的闭区间之并。

(2) 闭区间 $[a, b]$ 不能表为可列个不相交的闭区间之并。

提示 可用反证法证(1), 再用反证法及(1)证(2)。

25. 设定义在 R 上的函数 $f(x)$ 只取整数值, 则 $f(x)$ 的连

续点之集为开集；间断点之集为闭集。

提示 设 $x_0 \in E = \{x: x \in R, f \text{ 在 } x \text{ 处连续}\}$ 且 $f(x_0) = n_0$ (整数)，由连续性 & 已知条件可知，存在 $\delta > 0$ ，使得对一切 $x \in O(x_0, \delta)$ 有 $f(x) = n_0$ ，于是 f 在 $O(x_0, \delta)$ 上连续。

26. 设 M 是 $[a, b]$ 上一切单调函数所成之集，则 $\overline{M} = \aleph^s$ ，

提示 令 $[a, b]$ 中全体有理点为 r_1, r_2, \dots ，因单调函数 f 的间断点可列，故可设其无理间断点为 x_1, x_2, \dots ，则函数 f 由实数列 $\{f(r_1), f(x_1), f(r_2), f(x_2), \dots\}$ 所确定，由实数列全体之势为 \aleph^s ，便得 $\overline{M} \leq \aleph^s$ 。

至于 $\overline{M} \geq \aleph^s$ 是易证的。

27. 设 $G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$ 是直线上一列开集，每个 G_n 在直线上处处稠密，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ 也处处稠密。

提示 设 I 为任一开区间，由题设，在 I 中可依次作出一列闭区间 $[\alpha_n, \beta_n]$ ，使 $[\alpha_n, \beta_n] \subset (\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}) \cap G_n$ ，这样作出的闭区间必有公共点 $C \in [\alpha_n, \beta_n] \subset G_n (n = 1, 2, \dots)$ ，即

I 中有点 $C \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ 。

28. 证明：(1) 直线上一切有理数所成之集 Q 是 F_σ 型集，但不是 G_δ 型集。

(2) 直线上一切无理数所成之集是 G_δ 型集，但不是 F_σ 型集。

提示 (1) 证 Q 不是 G_δ 型集可用反证法：令 $P = \{r + \sqrt{2}; r \in Q\}$ ，则 P 也是处处稠密的 G_δ 型集，由上题可知 $Q \cap P$ 也处处稠密，这与 $Q \cap P = \emptyset$ 相矛盾。

(2) 对(1)中的集取补，由对偶原理可得证。

29. 证明 (林得略夫定理): 设点集 E 被开区间集 μ 所复盖, 则 μ 中必能选出至多可列个开区间即可复盖 E .

提示 对 E 中每一点 x , 找出 μ 中一个开区间 I 及相应的有理数 R 和正有理数 r , 使 $O(R, r) \subset I$, 因 $O(R, r)$ 至多可列便得结论.

30. 试证: 定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的单调函数的不连续点至多可列, 因而为零测度集.

证 先对 $(-\infty, \infty)$ 上的递增函数 $f(x)$ 来证明.

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上的不连续点的集合为 A , 由数学分析的知识知: $x \in A$ 的充要条件是 $f(x-0) < f(x+0)$, 且对任意的 $x_1, x_2 \in A$, 若 $x_1 < x_2$, 则 $f(x_1-0) < f(x_1+0) \leq f(x_2-0) < f(x_2+0)$. 因此, 对每一个 $x \in A$, 对应于直线上一个开区间 $(f(x-0), f(x+0))$, 且这些开区间是互不相交的. 于是, 据直线上互不相交的开区间至多可列, 便知 A 至多为可列集.

对 $(-\infty, \infty)$ 上的递减函数, 证法类同.

31. 设 E_1, E_2 可测, 试证

$$m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2 - m(E_1 \cap E_2)$$

证 因 $E_1 \cup E_2 = E_1 \cup (E_2 - E_1 \cap E_2)$, E_1 与 $E_2 - E_1 \cap E_2$ 不相交, 故

$$\begin{aligned} m(E_1 \cup E_2) &= mE_1 + m(E_2 - E_1 \cap E_2) \\ &= mE_1 + mE_2 - m(E_1 \cap E_2) \end{aligned}$$

32. 试证可列个零测度集的并仍是零测度集.

证 设 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $mE_n = 0 (n=1, 2, \dots)$. 由参考文献

[1]第二章定理 3.4 知 E 可测, 且

$$mE \leq \sum_{n=1}^{\infty} mE_n = 0$$

于是由测度的非负性即得 $mE = 0$ 。

33. 已知 $[0, 1]$ 中无理点集 E 的测度为 1, 试由内、外测度的定义, 考察其测度与 1 任意接近的含于 E 内的闭集以及包含 E 的开集的构造是怎样的。

解 (1) 因所求的闭集 F 要含在无理点集 E 中, 故 F 一定不含 $[0, 1]$ 中的有理点。又闭集 F 的测度要与 1 任意接近, 故 F 必是区间 $[0, 1]$ 减去一个包含一切有理点且测度可以任意小的开集所构成。 F 的构造方法如下:

设 $[0, 1]$ 中全体有理点为 $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$, ε 为任意小的正数, 作开区间 $I_n = (r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}) (n = 1, 2, \dots)$,

则 $G_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ 为开集, 且

$$mG_0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} mI_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

令 $F = [0, 1] - G_0$, 这个 F 就是含于 E 中且测度与 1 任意接近的闭集。

(2) 包含 E 的且测度与 1 任意接近的开集的取法很多, 如

$$(0, 1) \quad (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1) \\ \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \quad (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$$

等等。

34. 设 G_1, G_2 是开集, 且 G_1 是 G_2 的真子集, 是否一定

有 $mG_1 < mG_2$?

解 不一定有 $mG_1 < mG_2$. 例如

$$G_1 = (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1), \quad G_2 = (0, 1)$$

虽然 G_1 是 G_2 的真子集, 但 $mG_1 = mG_2 = 1$.

35. 对任意开集 G , 是否有 $m\overline{G} = mG$ 成立?

解 等式不一定成立, 如本章第33题中作出的开集 G_0 , 由于 G_0 包含了 $[0, 1]$ 中一切有理点, 可知 $\overline{G_0} \supset [0, 1]$, 于是 $m\overline{G_0} \geq 1$, 但 $mG_0 < \varepsilon$.

36. 如把外测度的定义改为“有界集 E 的外测度是包含 E 的闭集的测度的下确界”, 是否合理?

解 这种改法不合理。如设 $[0, 1]$ 中有理点集为 Q , 无理点集为 I , 则 $[0, 1] = Q \cup I$, 显然, 任何包含 Q 的闭集 F , 必有

$$F \supset \overline{Q} = [0, 1]$$

因此, 如采用上述方法定义外测度, 就有 $m^*Q = 1$, 但 $m_*Q = 0$, 这就使 Q 成为不可测集。即使采用其它方法定义内测度, 使 Q 与 I 均可测, 那将出现 $mQ + mI = 1 + 1 = 2$, 而 $m(Q \cup I) = m[0, 1] = 1$, 测度的有限可加性又不成立了。

37. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是有限个互不相交的可测集, 且 $E_k \subset A_k, k = 1, 2, \dots, n$, 试证

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n m^*E_k$$

证法一 据外测度的半可加性有

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) \leq \sum_{k=1}^n m^*E_k$$

又令 $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$, 则对任一开集 $G \supset E$, 有

$$G \supset \bigcup_{k=1}^n (G \cap E_k)$$

注意到各 $G \cap E_k$ 互不相交, 且 $G \cap A_k \supset E_k$ ($k=1, 2, \dots, n$), 便有

$$\begin{aligned} mG &\geq m \bigcup_{k=1}^n (G \cap A_k) = \sum_{k=1}^n m(G \cap A_k) \\ &= \sum_{k=1}^n m^*(G \cap A_k) \geq \sum_{k=1}^n m^*E_k \end{aligned}$$

因 G 是任一包含 E 的开集, 故

$$m^*E = \inf_{G \supset E} mG \geq \sum_{k=1}^n m^*E_k$$

综上所述即得

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n m^*E_k$$

证法二 当 $n=2$ 时, 因 A_1 可测, 据参考文献[1]第二章定理 3.5, 有

$$\begin{aligned} m^*(E_1 \cup E_2) &= m^*((E_1 \cup E_2) \cap A_1) \\ &\quad + m^*((E_1 \cup E_2) \cap \complement A_1) \\ &= m^*E_1 + m^*E_2 \end{aligned}$$

当 $n>2$ 时, 用数学归纳法可证得。

38. 设 G 是开集, E 是零测度集, 试证 $\overline{G} = \overline{(G - E)}$ 。

证 因 $G \supset G - E$, $\overline{G} \supset \overline{G - E}$ 为显然。另一方面, 因为 G 是开集, 有 $\overline{G} = G \cup G' = G'$ 。任取 $x \in \overline{G}$ 。在 x 的任一邻域 (α, β) 中, 必有 $x_0 \neq x$, 而 $x_0 \in G \cap (\alpha, \beta)$, 又因 $G \cap (\alpha, \beta)$ 为开集, 必存在 x_0 的邻域 (a, b) , 使得 $(a, b) \subset G \cap (\alpha, \beta)$ 。由 $mE = 0$ 可推知, 在 (a, b) 中必有异于 x 的点 $y \in G - E$ (否则, $mE \geq m(a, b) > 0$)。因 $(a, b) \subset (\alpha, \beta)$, 故 $y \in (\alpha, \beta)$, 于是

$$x \in (G - E)' \subset \overline{G - E}, \quad \overline{G} \subset \overline{G - E}$$

綜上等式得证。

39. 设 $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset \dots$, 试证

$$m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \lim_n m^* E_n$$

证 令 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 由 $E_n \subset E$, $m^* E_n \leq m^* E$ ($n = 1, 2, \dots$), 有

$$\lim_n m^* E_n \leq m^* E = m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right)$$

又作开集 $G_n \supset E_n$, 且 $mG_n < m^* E_n + \varepsilon$ ($n = 1, 2, \dots$),

并令 $P_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} G_n$

则 $P_k \subset G_k$ ($k = 1, 2, \dots$)

于是

$$mP_k \leq mG_k < m^* E_k + \varepsilon \quad (k = 1, 2, \dots)$$

由题设知, 当 $n \geq k$ 时, 有 $G_n \supset E_k$, 故

$$P_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} G_n \supset E_k \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E$$

且 $P_1 \subset P_2 \subset \dots$, 由参考文献[1]第二章定理3.6(i)得

$$m^*E \leq m \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k = \lim_k mP_k \leq \lim_k m^*E_k + \varepsilon$$

由 ε 的任意性, 便有

$$m^*E \leq \lim_k m^*E_k$$

综上得

$$m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = m^*E = \lim_n m^*E_n$$

40. 设 E 为一维有界集, I_1, I_2, \dots 是闭区间列 (可以相交), 其并复盖 E , 试证

$$m^*E = \inf_{\bigcup I_k \supset E} \sum_{k=1}^{\infty} mI_k$$

对二维情形如何?

证 因 $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, 由外测度的单调性和半可加性有

$$m^*E \leq m^* \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*I_k = \sum_{k=1}^{\infty} mI_k$$

取下确界便得

$$m^*E \leq \inf_{\bigcup I_k \supset E} \sum_{k=1}^{\infty} mI_k$$

又由外测度的定义, 对任意正数 ε , 有开集 $G \supset E$, 使

$mG < m^*E + \varepsilon$. 设 G 的结构表示为 $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, \beta_k)$, 作 $I_k =$

$[a_k, \beta_k] (k=1, 2, \dots)$, 则

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset G \supset E$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} mI_k = \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - a_k) = mG < m^*E + \varepsilon$$

从而

$$\inf_{\bigcup I_k \supset E} \sum_{k=1}^{\infty} mI_k < m^*E + \varepsilon$$

由 ε 的任意性得

$$m^*E \geq \inf_{\bigcup I_k \supset E} \sum_{k=1}^{\infty} mI_k$$

综上所述即得所要证明的等式。

对二维情形, 将上述闭区间列 I_1, I_2, \dots 改为闭长方形即可。

41. 试作一闭集 $F \subset [0, 1]$, 使 F 中不含任何开区间, 而 $mF = 1/2$.

解 首先在 $[0, 1]$ 的中央挖去长为 $\frac{1}{4}$ 的开区间 $(\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$, 然后在余下的两个闭区间的中央各挖去长为 $\frac{1}{4^2}$ 的开区间 $(\frac{5}{32}, \frac{7}{32})$, $(\frac{25}{32}, \frac{27}{32})$, 再在余下的 4 个闭区间的中央各挖去长为 $\frac{1}{4^3}$ 的开区间 (共 4 个)。

一般地, 在第 n 次挖去的开区间长为 $\frac{1}{4^n}$ (共 2^{n-1} 个)。这样一直挖下去, 就得到一系列开区间, 令这些开区间的并为

$$G = \left(-\frac{3}{8}, -\frac{5}{8}\right) \cup \left(-\frac{5}{32}, -\frac{7}{32}\right) \\ \cup \left(-\frac{25}{32}, -\frac{27}{32}\right) \cup \dots$$

则

$$mG = \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4^2} + \dots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{4^n} + \dots \\ = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots = \frac{1}{2}$$

现令 $F = [0, 1] - G$, 显然 F 为不含任何开区间的闭集, 且

$$mF = m[0, 1] - mG = 1/2$$

故这个 F 即为所求之闭集。

42. 如把外测度的定义改为: m^*E 为包含 E 的可测集测度的下确界, 问在这个新意义下的外测度与原来的外测度有何关系?

解 两者相等。事实上, 设 $\inf_{\substack{A \supset E \\ A \text{ 可测}}} m A = a$, 由于可测集

类包含开集类, 故有

$$\inf_{\substack{G \supset E \\ G \text{ 为开集}}} m G \geq \inf_{\substack{A \supset E \\ A \text{ 可测}}} m A = a$$

又因 $\inf_{\substack{A \supset E \\ A \text{ 可测}}} m A = a$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在可测集 $A_1 \supset E$, 使

$m A_1 < a + \frac{\varepsilon}{2}$, 因 A_1 可测, 必存在开集 $G_1 \supset A_1 \supset E$,

使 $mG_1 \leq mA_1 + \frac{\varepsilon}{2} < a + \varepsilon$. 由 ε 的任意性便得

$$\inf_{\substack{G \supset E \\ G \text{ 为开集}}} mG \leq a$$

综上得:

$$\inf_{\substack{G \supset E \\ G \text{ 为开集}}} mG = a = \inf_{\substack{A \supset E \\ A \text{ 可测}}} mA$$

43. 下列各题中给出了在 σ 环 \mathcal{R}_σ 上集函数 λ 的例子, 问哪些是外测度, 哪些不是:

(i) X 是任意非空集, \mathcal{R}_σ 是 X 的一切子集的类, 对于 \mathcal{R}_σ 中任意元 E , 令 $\lambda E = \chi_E(x_0)$, 这里 $x_0 \in X$ 是固定的一点, $\chi_E(x)$ 是集 E 的特征函数: $\chi_E(x) = 1$ (当 $x \in E$), $\chi_E(x) = 0$ (当 $x \notin E$).

解 λ 是外测度, 验证如下:

(1) $\lambda E \geq 0$, $\lambda \phi = 0$ 为显然。

(2) 若 $x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 则存在自然数 n_0 , 使 $x_0 \in E_{n_0}$, 于是

$$\lambda \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = 1 = \lambda E_{n_0} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda E_n$$

若 $x_0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 则 $x_0 \notin E_n, \lambda E_n = 0 (n = 1, 2, \dots)$,

于是

$$\lambda \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda E_n \quad (\text{半可加性成立})$$

(3) 设 $E_1 \subset E_2$, 若 $x_0 \in E_1$, 则 $\lambda E_1 = \lambda E_2 = 1$; 若

$x_0 \in E_1$, 则

$$\lambda E_1 = 0 \leq \lambda E_2 \quad (\text{单调性成立})$$

(ii) X 是正整数集, \mathcal{R}_0 是 X 的一切子集的类。对 X 的任一有限子集 E , 用 $N(E)$ 表示 E 中点的个数, 令

$$\lambda E = \overline{\lim} \frac{1}{n} N(E \cap \{1, 2, \dots, n\}), E \in \mathcal{R}_0.$$

解 λ 不是外测度, 因为半可加性不成立。

事实上, 令 $E_i = \{i\}$, 则

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

$$N(X \cap \{1, 2, \dots, n\}) = N(\{1, 2, \dots, n\}) = n$$

可知 $\lambda X = \overline{\lim} \frac{1}{n} n = 1$, 但 $\lambda E_i = 0 (i = 1, 2, \dots)$,

$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda E_i = 0$, 于是有

$$\lambda \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) > \sum_{i=1}^{\infty} \lambda E_i$$

(iii) 设 μ^* 是 \mathcal{R}_0 上的外测度, E_0 是 \mathcal{R}_0 上一个确定的集, 令 $\lambda E = \mu^*(E \cap E_0)$ (λ 称为 μ^* 关于 E_0 的吸收), $E \in \mathcal{R}_0$.

解 λ 是外测度。验证如下:

(1) $\lambda E \geq 0$, $\lambda \phi = 0$ 为显然。

$$(2) \lambda \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \mu^* \left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \cap E_0 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \mu^* \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap E_0) \right] \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n \cap E_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda E_n
\end{aligned}$$

(3) 设 $E_1 \subset E_2$, 则 $E_1 \cap E_0 \subset E_2 \cap E_0$, 于是

$$\lambda E_1 = \mu^*(E_1 \cap E_0) \leq \mu^*(E_2 \cap E_0) = \lambda E_2$$

注意, (2)和(3)中的不等式成立是根据外测度 μ^* 的半可加性和单调性。

(iv) 设 μ_1^*, μ_2^* 是 \mathcal{R}_σ 上的两个外测度, 令

$$\lambda E = a\mu_1^* E + b\mu_2^* E, \quad E \in \mathcal{R}_\sigma$$

这里 a, b 是实数。

解 ①当 $a \geq 0, b \geq 0$ 时, λ 为外测度, 验证如下:

(1) $\lambda E \geq 0, \lambda \phi = 0$ 为显然。

$$(2) \lambda \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = a\mu_1^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) + b\mu_2^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right)$$

$$\leq a \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1^* E_n + b \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2^* E_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (a\mu_1^* E_n + b\mu_2^* E_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda E_n$$

(3) 设 $E_1 \subset E_2$, 则 $\mu_1^* E_1 \leq \mu_1^* E_2, \mu_2^* E_1 \leq \mu_2^* E_2$,

于是

$$\begin{aligned}\lambda E_1 &= a\mu_1^*E_1 + b\mu_2^*E_1 \leq a\mu_1^*E_2 + b\mu_2^*E_2 \\ &= \lambda E_2\end{aligned}$$

②当 $a < 0, b < 0$ 时, 在 μ_1^*, μ_2^* 中至少有一个不等于0时, λ 肯定不是外测度, 因 $\lambda E \geq 0$ 不成立。

③当 a, b 中有一个为负数时, λ 不一定成为外测度。

44. 设 m 表示 R^1 中外测度限制在波雷尔集类上的测度, a, b 为实数, 集 E 的 T 变换定义为 $T(E) = \{x: ax + b, x \in E\}$ 试证, 对每个波雷尔集 E , 有 $mT(E) = |a|mE$.

证 根据测度对平移的不变性, 只要证明变换 $T(E) = \{ax: x \in E\}$ 对每个波雷尔集 E 有 $mT(E) = |a|mE$.

对于 $a = 0$ 的特殊情形, 结论显然正确。对 $a \neq 0$, 分下述四步证之。

$$(1) \text{ 先证: } T\left(\bigcup_k E_k\right) = \bigcup_k T(E_k)$$

$$T\left(\bigcap_k E_k\right) = \bigcap_k T(E_k)$$

事实上

$$x \in T\left(\bigcup_k E_k\right) \Rightarrow \frac{x}{a} \in \bigcup_k E_k \Rightarrow \text{存在 } k_0, \text{ 使}$$

$$\frac{x}{a} \in E_{k_0} \Rightarrow x \in T(E_{k_0}) \Rightarrow x \in \bigcup_k T(E_k)$$

反之

$$x \in \bigcup_k T(E_k) \Rightarrow \text{存在 } k_0, \text{ 使 } x \in T(E_{k_0})$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} \in E_{k_0} \Rightarrow \frac{x}{a} \in \bigcup_k E_k$$

$$\Rightarrow x \in T\left(\bigcup_k E_k\right)$$

故

$$T\left(\bigcup_k E_k\right) = \bigcup_k T(E_k)$$

同理可证另一等式。

(2) 次证：若 G 为开集，则 $T(G)$ 也为开集，且 $mT(G) = |a|mG$ 。

事实上，对开区间 (α, β) ，有

$$T(\alpha, \beta) = \begin{cases} (a\alpha, a\beta) & (\text{当 } a > 0) \\ (a\beta, a\alpha) & (\text{当 } a < 0) \end{cases}$$

显然， $T(\alpha, \beta)$ 仍为开区间，且 $mT(\alpha, \beta) = |a|(\beta - \alpha)$ 。

设 $G = \bigcup_k (\alpha_k, \beta_k)$ ，则 $T(G) = \bigcup_k T(\alpha_k, \beta_k)$ ， $T(\alpha_k, \beta_k)$

互不相交，于是

$$\begin{aligned} mT(G) &= \sum_k mT(\alpha_k, \beta_k) = \sum_k |a|(\beta_k - \alpha_k) \\ &= |a| \sum_k (\beta_k - \alpha_k) = |a|mG \end{aligned}$$

(3) 再证：若 F 为闭集，则 $T(F)$ 也为闭集。

事实上，因 $F \cup \mathcal{C}F = R^1$ ， $F \cap \mathcal{C}F = \phi$ ，由(1)有

$$T(F) \cup T(\mathcal{C}F) = T(R^1) = R^1$$

$$T(F) \cap T(\mathcal{C}F) = T(\phi) = \phi$$

故

$$T(F) = R^1 - T(\mathcal{C}F)$$

由(2)知 $T(\mathcal{C}F)$ 为开集，于是 $T(F)$ 为闭集。

(4) 对波雷尔集 E ，据其定义，由(1)，(2)，(3)即得 $T(E)$ 为波雷尔集。下证 $m^*T(E) = |a|m^*E$ 。

事实上，对任意的开集 $G \supset E$ ，显然有

$$G \supset E \Leftrightarrow T(G) \supset T(E)$$

于是由(2)有

$$\begin{aligned} m^*T(E) &= \inf_{T(G) \supset T(E)} mT(G) = \inf_{G \supset E} |a| mG \\ &= |a| m^*E \end{aligned}$$

再注意到波雷尔集的可测性, 便得

$$mT(E) = m^*T(E) = |a| m^*E = |a| mE$$

45. 试证: 若存在 μ 可测集 $X \supset E$, 而满足

$$\mu X < \infty, \quad \mu X = \mu^*E + \mu^*(X - E)$$

则 E 为 μ 可测的。

证 仅对 μ 为勒贝格测度 m 给出证明。对于一般抽象测度 μ , 可先引进内测度 μ_* , 然后证明 E 为 μ 可测的充要条件是 $\mu^*E = \mu_*E$, 再证明本题结论。

(1) 先证: 对任一集 A , 存在 G_δ 型集 B , 使 $B \supset A$, 且 $mB = m^*A$ 。

事实上, 由外测度的定义, 对任何自然数 n , 存在开集 $G_n \supset A$, 且

$$mG_n < m^*A + \frac{1}{n}$$

令
$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

则
$$A \subset B \subset G_n, \quad m^*A \leq mB < m^*A + \frac{1}{n}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得

$$mB = m^*A$$

(2) 次证: $mX = m_*E + m^*(X - E)$ 。

事实上, 对任何闭集 $F \subset E$, 有 $X - F \supset X - E$, 于是

$$m^*(X-E) \leq m(X-F) = mX - mF$$

即

$$mF \leq mX - m^*(X-E)$$

取上确界得

$$m_*E \leq mX - m^*(X-E)$$

即

$$mX \geq m_*E + m^*(X-E)$$

另一方面, 对集 $X-E$, 由(1)有 G_δ 型集 B , 使

$$B \supset X-E, \quad mB = m^*(X-E)$$

因 $E \supset X-B$, 故

$$\begin{aligned} m_*E &\geq m(X-B) \geq mX - mB \\ &= mX - m^*(X-E) \end{aligned}$$

即

$$mX \leq m_*E + m^*(X-E)$$

综上所述得

$$mX = m_*E + m^*(X-E)$$

(3) 再证 E 可测。

事实上, 由(2)和题设 $mX = m_*E + m^*(X-E)$ 可得 $m^*E = m_*E$, 故 E 可测。

46. 设 E 为 R^n 中任一子集, α 为给定正数, 对于任何 $\varepsilon > 0$, 令

$$H_{\alpha, \varepsilon}(E) = \inf \sum_k \delta(E_k)^\alpha$$

其中 $\delta(E_k)$ 表示 E_k 的直径, 且下确界对一切满足 $E \subset \bigcup E_k$ 而 $\delta(E_k) < \varepsilon (k=1, 2, \dots)$ 的集列 $\{E_k\}$ 而取。再令

$$H_\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{\alpha, \varepsilon}(E) = \sup_{\varepsilon > 0} H_{\alpha, \varepsilon}(E)$$

试证 H_α 为基本集 R^n 上的外测度, 并满足条件:

若 $H_\alpha(E) < \infty$, 则当 $\beta > \alpha$ 时, $H_\beta(E) = 0$ (H_α 称为豪斯道夫 (F. Hausdorff) 测度)。

证 先证 H_α 为外测度。

(1) $H_\alpha(E) \geq 0$, $H_\alpha(\phi) = 0$ 为显然。

(2) 若 $E_1 \subset E_2$, 则对任何 $\varepsilon > 0$, 显然有

$$H_{\alpha, \varepsilon}(E_1) \leq H_{\alpha, \varepsilon}(E_2)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 使得

$$H_\alpha(E_1) \leq H_\alpha(E_2)$$

(3) 设 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 任给正数 ε , 对每个 E_n , 由下确界的意义, 对任意的 $\Delta > 0$, 存在 $E_{n, k}$, 使 $\bigcup_k E_{n, k} \supset E_n$,

$\delta(E_{n, k}) < \varepsilon$, 且

$$\sum_k \delta(E_{n, k})^\alpha < H_{\alpha, \varepsilon}(E_n) + \frac{\Delta}{2^n}$$

($n = 1, 2, \dots$)

显然,

$$\bigcup_{n, k} E_{n, k} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_k E_{n, k} \supset E$$

于是

$$\begin{aligned} H_{\alpha, \varepsilon}(E) &= \inf \sum_k \delta(E_k)^\alpha \leq \sum_{n, k} \delta(E_{n, k})^\alpha \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_k \delta(E_{n, k})^\alpha < \sum_{n=1}^{\infty} H_{\alpha, \varepsilon}(E_n) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} H_{\alpha, \varepsilon}(E_n) + \Delta \end{aligned}$$

由 Δ 的任意性得

$$H_{\alpha, \varepsilon}(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} H_{\alpha, \varepsilon}(E_n)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 便得

$$H_{\alpha}(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} H_{\alpha}(E_n)$$

由(1), (2), (3)知 H_{α} 为外测度。

次证当 $\beta > \alpha$, $H_{\alpha}(E) < \infty$ 时, $H_{\beta}(E) = 0$ 。

对任何正数 ε , 当 $\delta(E_k) < \varepsilon$, $\bigcup_k E_k \supset E$ 时, 有

$$\begin{aligned} \sum_k \delta(E_k)^{\beta} &= \sum_k \delta(E_k)^{\alpha} \cdot \delta(E_k)^{\beta-\alpha} \\ &\leq \varepsilon^{\beta-\alpha} \sum_k \delta(E_k)^{\alpha} \end{aligned}$$

取下确界得

$$H_{\beta, \varepsilon}(E) \leq \varepsilon^{\beta-\alpha} H_{\alpha, \varepsilon}(E)$$

因为 $H_{\alpha}(E) < \infty$, $\beta - \alpha > 0$, 令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 便得 $H_{\beta}(E) = 0$ 。

47. 证明: 用十进小数表示 $[0, 1]$ 中的数时, 不含数码 7 的一切数所成之集 E 是完全集, 并求 mE 。

答 $mE = 0$ 。

48. 证明:

(1) 直线上一切可测集所成之集 μ 的势为 2^{\aleph_1} 。

(2) 直线上一切不可测集所成之集 ν 的势是什么?

提示 (1) $\overline{\mu} \geq 2^{\aleph_1}$ 可由康脱集 P_0 的一切子集均可测推得。 $\overline{\mu} \leq 2^{\aleph_1}$ 可由直线上一切点集所成之集族的势为 2^{\aleph_1} 推知。

$$(2) \quad \overline{v} = 2^{\frac{9}{5}}.$$

49. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 $[0, 1]$ 中 n 个可测集, 且

$$\sum_{i=1}^n m A_i > n-1, \text{ 则有 } m\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) > 0.$$

提示 可先证 $m\left(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{C} A_i\right) < 1$, 再用对偶原理推得

结论。

50. 若存在两列可测集 $\{A_n\}, \{B_n\}$, 使 $A_n \subset E \subset B_n$ ($n=1, 2, \dots$), 且 $m(B_n - A_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 则 E 可测。

提示 可先证 $m^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n - E\right) = 0$ 。

51. 设 A, B 是互不相交的可测集, 则对任一集 E , 有

$$(1) \quad m^*(E \cap (A \cup B)) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap B)$$

$$(2) \quad m_*(E \cap (A \cup B)) = m_*(E \cap A) + m_*(E \cap B)$$

提示 (1) 可用外测度的定义证

$$m^*(E \cap (A \cup B)) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap B)$$

相反的不等号可由外测度的半可加性得到。

(2) 证法与(1)类似。

52. 设 E 与 F 有一为可测集, 则

$$m^*E + m^*F = m^*(E \cup F) + m^*(E \cap F)$$

提示 用卡氏条件, 分别取 T 为 $E \cup F$ 和 F 。

53. 设 E, F 为互不相交的点集, 则

$$m_*(E \cup F) \leq m_*E + m^*F \leq m^*(E \cup F)$$

提示 对 $E \cup F$, 有 F_0 型集 $B \subset E \cup F$, $mB = m_*(E \cup F)$. 对 F , 有 G_δ 型集 $A \supset F$, $mA = m^*F$. 据此可证左边的不等式, 用类似的方法可证右边。

54. 证明下列两个条件均为 E 可测的充要条件:

(1) 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G \supset E$, 使 $m^*(G - E) < \varepsilon$.

(2) 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset E$, 使 $m^*(E - F) < \varepsilon$.

提示 (1) 必要性由测度定义推得, 充分性可由上题推得。

(2) 用取补集的方法由(1)推得。

55. 设 E 为可测集, 则对任意集 T , 有

$$m_*(E \cap T) + m^*(E \cap \mathcal{C}T) = mE$$

提示 用题53的结论即得。

56. 设 $m^*E = q > 0$, 则对任何实数 $C \in (0, q)$, 存在 $E_0 \subset E$, 使 $m^*E_0 = C$.

提示 令 $E_x = E \cap (-\infty, x]$, $f(x) = m^*(x)E_x$, 先证 f 连续, 再用介值定理。

57. 设 $\{A_n\}$ 为可测集列, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} mA_n < \infty$, 则

$$m\left(\overline{\lim}_n A_n\right) = 0$$

提示 对任意的 $\varepsilon > 0$, 由题设, 有自然数 N , 使

$\sum_{n=N}^{\infty} mA_n < \varepsilon$, 再由 $\overline{\lim}_n A_n \subset \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$, 可推得结论。

第二章 可测函数和勒贝格积分

一、基本概念和主要定理

可测函数 设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的实函数。如果对每一实数 a ，集 $E(f > a)$ 恒可测（勒贝格可测），则称 $f(x)$ 是 E 上（勒贝格）可测函数。其中条件“ $E(f > a)$ 恒可测”可换成如下三个条件中的任何一个：“ $E(f \geq a)$ 恒可测”，“ $E(f < a)$ 恒可测”，“ $E(f \leq a)$ 恒可测”。

简单函数 设 E 是一可测集， $f(x)$ 在 E 上只取有限多个值 C_1, C_2, \dots, C_n ，且 $E(f = C_1), E(f = C_2), \dots, E(f = C_n)$ 均可测。若设 $e_K = E(f = C_K)$ ，

$$\chi_{e_K}(x) = \begin{cases} 1 & \text{若 } x \in e_K \\ 0 & \text{若 } x \notin e_K \end{cases}$$

（ $\chi_{e_K}(x)$ 称为集 e_K 的特征函数）则简单函数可写成如下形式：

$$f(x) = \sum_{K=1}^n C_K \chi_{e_K}(x)$$

连续函数 设 $f(x)$ 为定义在集 E 上的有限函数。如果对任何 $x_n \rightarrow x (x_n \in E)$ 有 $f(x_n) \rightarrow f(x)$ ，则称 $f(x)$ 于一点 $x \in E$ 连续。如果 $f(x)$ 于 E 中每一点连续，则称 $f(x)$ 在 E 上连续。这里，对于 E 的孤立点处，总约定 $f(x)$ 是连续

的。

可测集 E 上的连续函数，必是可测函数。

“几乎处处”概念 如果命题 S 在集 E 上除了某个零测度子集外，处处成立，则说命题 S 在 E 上几乎处处成立。

如， E 上定义的两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 称为在 E 上几乎处处相等，指

$$mE(f(x) \neq g(x)) = 0$$

此时又称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 对等，记作 $f(x) \sim g(x)$ 。

近一致收敛 设 f, f_n 是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数列，如果对任意的 $\delta > 0$ ，都存在 E 的可测子集 E_δ ，使在 E_δ 上 f_n 一致收敛于 f ，而 $m(E - E_\delta) < \delta$ ，则称序列 f_n 在 E 上近一致收敛于 f 。

测度收敛 设 $f_n(x)$ 是可测集 E 上的可测函数列， $f(x)$ 是 E 上可测函数。如果对每个 $\varepsilon > 0$ ，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} mE(|f_n - f| \geq \varepsilon) = 0$$

则称 f_n 为测度收敛于 f 。

定理 1 设 $f_1(x), f_2(x), \dots$ 是可测集 E 上可测函数列，则当 $\lim f_n(x)$ 几乎处处存在时，它是 E 上的可测函数。

定理 2 设 $f(x)$ 是可测集 E 上非负可测函数，则存在一系列非负递增的简单函数 $\varphi_n(x)$ ：

$$0 \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \dots$$

使等式 $\lim \varphi_n(x) = f(x)$ 在 E 上处处成立。

定理 3 在可测集 E 上定义的两个可测函数的和、差、积、商（假定运算几乎处处有意义）都是可测的。

定理 4（叶果洛夫定理） 设 E 是可测集， $mE < +\infty$ ，

$f_n(x)$ ($n=1,2,3,\dots$) 与 $f(x)$ 是在 E 上几乎处处有限的可测函数, 且 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$ 。则 $f_n(x)$ 在 E 上近一致收敛于 $f(x)$ 。

定理 5 (黎斯定理) 设 $f_n(x)$ 在 E 上测度收敛于 $f(x)$, 而 $mE < +\infty$, 则存在 $\{f_n(x)\}$ 的子序列 $\{f_{n_k}(x)\}$, 几乎处处收敛于 $f(x)$ 。

定理 6 (鲁津定理) 设 $f(x)$ 是有界可测集 E 上的可测函数, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset E$, $m(E - F) < \varepsilon$, 而 $f(x)$ 限制在 F 上是连续的。

简单函数的勒贝格积分 设在 E 上定义的简单函数 $\varphi(x)$ 有表示式

$$\varphi(x) = \sum_{K=1}^n y_K X_{e_K}(x)$$

其中各 $e_K = E(\varphi = y_K)$ 为互不相交的可测集, 各 y_K 互异,

而 $X_{e_K}(x)$ 表示 e_K 上的特征函数。我们称和数 $\sum_{K=1}^n y_K m e_K$ 为

简单函数 $\varphi(x)$ 在 E 上的勒贝格积分, 并记为

$$\int_E \varphi(x) dm = \sum_{k=1}^n y_K m e_K$$

一般可测函数的勒贝格积分 设 $f(x)$ 是有界可测集 E 上的可测函数。对于 $f(x) \geq 0$ 的情形, 取 $\varphi(x)$ 为任一满足 $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ ($x \in E$) 的简单函数, 让 φ 变动, 定义 $f(x)$ 在 E 上的积分为

$$\int_E f(x) dm = \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int_E \varphi(x) dm$$

若此量为有限数, 则称 $f(x)$ 在 E 上勒贝格可积。对于一般可测函数 $f(x)$, 当 $\int_E f_+(x) dm$ 与 $\int_E f_-(x) dm$ 不同时为 $+\infty$ 时, 称 $f(x)$ 的积分存在, 定义 $f(x)$ 在 E 上的积分为

$$\int_E f(x) dm = \int_E f_+(x) dm - \int_E f_-(x) dm$$

当此量为有限数时, 称 $f(x)$ 在 E 上勒贝格可积。

无界集上的勒贝格积分 设 $f(x)$ 是 R^n 上的可测函数。 $\{\Delta_k\}$ 是 R^n 中任一渐张的区间列 $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \dots$, $\bigcup_k \Delta_k = R^n$, 若极限

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Delta_k} |f(x)| dm$$

存在且有限, 则称 $f(x)$ 在 R^n 上可积, 积分记为

$$\int_{R^n} f(x) dm = \lim \int_{\Delta_k} f(x) dm$$

如果 $f(x)$ 仅在 R^n 的无界子集 E 上有定义, 则定义

$$\int_E f(x) dm = \int_{R^n} f(x) X_E(x) dm$$

其中 X_E 为集 E 的特征函数。

围变函数 设 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的有限函数, 考察区间 $[a, b]$ 的任一组分点:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

当分点变动时, 称上确界

$$\sup_{(x_0, x_1, \dots, x_n)} \sum_{k=1}^n \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right|$$

为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的总变分, 并记为 $\bigvee_a^b(f)$ 。若 $\bigvee_a^b(f) < +\infty$, 称 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的围变函数。

绝对连续函数 设 $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$ 表示 $[a, b]$ 中任意有限个互不相交的区间所成的区间系, 如果当

$m\left(\bigcup_k (\tilde{a}_k, b_k)\right) \rightarrow 0$ 时, 有

$$\sum_k \left| f(b_k) - f(a_k) \right| \rightarrow 0$$

则称 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的绝对连续函数。

奇异函数 设 $\gamma(x)$ 为连续围变函数, 不等于常数, 且 $\gamma'(x) \sim 0$, 则称 $\gamma(x)$ 为奇异函数。

定理 7 (积分的绝对连续性) 设 $f(x)$ 在 E 上可积, 则对任一正数 ε , 有正数 δ , 使当 $m e < \delta$ ($e \subset E$) 时, 就有

$$\left| \int_e f(x) dm \right| < \varepsilon$$

定理 8 (积分的完全可加性) 设 $f(x)$ 在可测集 E 上的积分存在, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, E_k 等都是可测的且两两不相交, 则

$$\int_E f(x) dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x) dm$$

定理 9 (积分的线性) 设 $f(x), g(x)$ 在 E 上可积, a, b 为常数, 则

$$\int_E [af(x) + bg(x)]dm = a \int_E f(x)dm + b \int_E g(x)dm$$

定理10 (唯一性定理) $\int_E |f(x)|dm = 0$ 的充要条件是 $f(x) \sim 0$.

定理11 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的可积函数, 则对任何正数 ε , 必有区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $g(x)$, 使

$$\int_{[a, b]} |f(x) - g(x)|dm < \varepsilon$$

定理12 (勒维定理) 设可测函数列满足下面的性质:

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

则 $f_n(x)$ 的积分列收敛于 $f(x)$ 的积分:

$$\int_E f(x)dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)dm$$

定理13 (法杜引理) 设 $f_n(x)$ 是非负可测函数列, 则

$$\int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)dm \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)dm$$

定理14 (勒贝格控制收敛定理) 设

- (1) $\{f_n(x)\}$ 是可测集 E 上的可测函数列;
- (2) $|f_n(x)| \leq F(x)$ a.e. 于 $E, n = 1, 2, \dots$, 且 $F(x)$ 在 E 上可积分 (称 $\{f_n(x)\}$ 为 $F(x)$ 所控制, 而 $F(x)$ 叫控制函数);
- (3) $f_n(x)$ 测度收敛于 $F(x)$

则 $f(x)$ 在 E 上可积且有

$$\int_E f(x)dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)dm$$

定理15 区间 $[a, b]$ 上的有界函数 $f(x)$ 为 R 可积的充要条件是 $f(x)$ 的不连续点集为零测度集。又, 当 $f(x)$ 在 $[a, b]$

上 R 可积时, 必定也 L 可积且两积分值相等。

定理16 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的围变函数的充要条件是它可以表示成两个单调增函数的差。

定理17 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的绝对连续函数的充要条件是存在可积函数 $g(x)$, 使

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(x) dm$$

定理18 定义于区间 $[a, b]$ 上的围变函数 $f(x)$ 可以分解为

$$f(x) = \varphi(x) + r(x) + S(x)$$

其中 $\varphi(x)$ 为绝对连续函数, $r(x)$ 为奇异函数或零, 而 $S(x)$ 为 $f(x)$ 的跳跃函数。

二、例题、习题与解法

1. 证明 $f(x)$ 是 E 上可测函数的充要条件是: 对任一有理数 r , 集 $E(f > r)$ 恒可测。如果集 $E(f = r)$ 恒可测, 问 $f(x)$ 是否可测?

证 必要性。

根据可测函数的定义, 必要性显然成立。

充分性。

任取实数 a , 设有理数列 $\{r_n\}$ 满足 $r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < r_n < r_{n+1} < \cdots$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = a$ 。则

$$E(f \geq a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f > r_n)$$

因为每一个 $E(f > r_n)$ 都可测, 所以 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E(f > r_n)$ 可

测, 从而 $E(f \geq a)$ 可测, 故 $f(x)$ 是 E 上的可测函数。

若仅有 $E(f = r)$ 恒可测 (r 是有理数), 则 $f(x)$ 在 E 上不一定可测。

例如, 设 $E = [0, 1]$, M 为 E 中任一不可测子集, 定义

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & , \text{当 } x \in M \\ -\sqrt{2} & , \text{当 } x \in E - M \end{cases}$$

则对任何有理数 r , $E(f = r)$ 为空集恒可测。但 $f(x)$ 在 E 上不可测, 因为 $E(f > 0) = M$ 是不可测集。

2. 设 $f(x)$ 是 E 上可测函数, G 为开集, F 为闭集。试问 $E(f \in G)$, $E(f \in F)$ 是否可测? 这里记号 $E(f \in A) = E(x: f(x) \in A)$ 。

解 (1) 设 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n)$, 其中每个 (α_n, β_n) 为 G 的构成区间。

$$E(f \in G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [E(f > \alpha_n) \cap E(f < \beta_n)]$$

因为 $f(x)$ 在 E 上可测, 对一切 n , $E(f > \alpha_n) \cap E(f < \beta_n)$ 必为可测集, 所以 $\bigcup_{n=1}^{\infty} [E(f > \alpha_n) \cap E(f < \beta_n)]$ 是可测集, 即 $E(f \in G)$ 可测。

(2) 令 $G_0 = \mathcal{C}F$, 则由 F 是闭集知 G_0 是开集, 从而 $E(f \in G_0)$ 是可测集。

而 $E(f \in F) = E - E(f \in G_0)$

故 $E(f \in F)$ 是可测集。

3. 设 $f(x), g(x)$ 为 E 上可测函数, 试证 $E(f > g)$ 是可测集。

证 设 $\{r_n\}$ 是全体有理数所成的序列, 则

$$E(f > g) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [E(f > r_n) \cap E(g < r_n)]$$

事实上, 若有 $x_0 \in E(f > g)$, 则 $f(x_0) > g(x_0)$, 必存在有理数 r_k , 使 $f(x_0) > r_k > g(x_0)$, 于是

$$x_0 \in E(f > r_k) \cap E(g < r_k)$$

从而

$$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [E(f > r_n) \cap E(g < r_n)]$$

所以有

$$E(f > g) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [E(f > r_n) \cap E(g < r_n)]$$

反之, 若有

$$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [E(f > r_n) \cap E(g < r_n)]$$

则存在 n_0 , 使 $x_0 \in E(f > r_{n_0}) \cap E(g < r_{n_0})$, 于是

$$f(x_0) > r_{n_0} > g(x_0), f(x_0) > g(x_0)$$

从而 $x_0 \in E(f > g)$ 。所以

$$E(f > g) \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} [E(f > r_n) \cap E(g < r_n)]$$

故

$$E(f > g) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [E(f > r_n) \cap E(g < r_n)]$$

又, f, g 皆 E 上可测函数, 对于一切 n , $E(f > r_n)$ 与

$E(g < r_n)$ 皆为可测集, 因此 $\bigcup_{n=1}^{\infty} [E(f > r_n) \cap E(g < r_n)]$ 是可测集, 故 $E(f > g)$ 是可测集。

4. (i) 证明 $S - \overline{\lim} A_n = \underline{\lim}(S - A_n)$

(ii) 设 A_n 是下述点集: n 为奇数时, $A_n = (0, 1 - \frac{1}{n})$; n 为偶数时, $A_n = (\frac{1}{n}, 1)$ 。证明 $\{A_n\}$ 有极限, 并求之。

证 (i) $S - \overline{\lim} A_n$

$$\begin{aligned} &= S - \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = S \cap \mathcal{C} \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \right) \\ &= S \cap \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{C} \left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \right) \right] = S \cap \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \mathcal{C} A_n \right] \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[S \cap \left(\bigcap_{n=k}^{\infty} \mathcal{C} A_n \right) \right] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} (S \cap \mathcal{C} A_n) \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} (S - A_n) \\ &= \underline{\lim}(S - A_n) \end{aligned}$$

(ii) 因为 $\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = (0, 1)$ 对任何自然数 k 成立,

所以

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = (0, 1)$$

另一方面, 当 k 为奇数 ($k > 1$) 时,

$$\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \left(\frac{1}{k+1}, 1 - \frac{1}{k} \right), \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi$$

当 K 为偶数时,

$$\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \left(\frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k+1} \right)$$

所以

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = (0, 1)$$

即

$$\underline{\lim} A_n = (0, 1)$$

因为 $\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = (0, 1)$, 所以 $\{A_n\}$ 有极限且 $\lim A_n = (0, 1)$.

5. 用 $X_E(x)$ 表示集 E 的特征函数, 试证对于任一集列 $\{E_n\}$, 有

$$X_{\overline{\lim} E_n}(x) = \overline{\lim} X_{E_n}(x)$$

$$X_{\underline{\lim} E_n}(x) = \underline{\lim} X_{E_n}(x)$$

从而集列 E_n 的极限存在等价于函数列 $X_{E_n}(x)$ 的极限存在。

$$\text{证 } X_{\overline{\lim} E_n}(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{\lim} E_n$$

$$\Leftrightarrow \{E_n\} \text{ 中有无限多个含有 } x$$

$$\Leftrightarrow \{X_{E_n}(x)\} \text{ 中, 有无限多个取值为 } 1$$

$$\Leftrightarrow \overline{\lim} X_{E_n}(x) = 1$$

所以使函数 $X_{\overline{\lim} E_n}(x)$ 取值为 1 的点与使函数

$\overline{\lim} X_{E_n}(x)$ 取值为1的点完全一致, 而两函数 $X_{\overline{\lim} E_n}(x)$ 与 $\overline{\lim} X_{E_n}(x)$ 的值不取1便取0, 因此使两函数取值为0的点也必定一致。

故

$$X_{\overline{\lim} E_n}(x) = \overline{\lim} X_{E_n}(x)$$

同理可证

$$X_{\underline{\lim} E_n}(x) = \underline{\lim} X_{E_n}(x)$$

于是, 集列 $\{E_n\}$ 的极限存在

$$\Leftrightarrow \underline{\lim} E_n = \overline{\lim} E_n$$

$$\Leftrightarrow X_{\underline{\lim} E_n}(x) = X_{\overline{\lim} E_n}(x)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\lim} X_{E_n}(x) = \overline{\lim} X_{E_n}(x)$$

$$\Leftrightarrow \text{函数列}\{X_{E_n}(x)\}\text{的极限存在}$$

所以集列 $\{E_n\}$ 的极限存在等价于函数列 $\{X_{E_n}(x)\}$ 的极限存在。

6. 设 $f(x)$, $f_n(x)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 是定义在集 $E = [a, b]$ 上的实函数, r 为自然数, 用记号 $E(|f_n - f| < \frac{1}{r})$ 表示 E 中满足 $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{r}$ 的点所成之集, 试

证 $\bigcap_{r=1}^{\infty} \underline{\lim} E(|f_n - f| < \frac{1}{r})$ 是 E 中使 $f_n(x)$ 收敛于 $f(x)$ 的点集。

证 设 E 中使 $f_n(x)$ 收敛于 $f(x)$ 的点集为 A , 则 E 中使 $f_n(x)$ 不收敛于 $f(x)$ 的点集 $B = E - A$ 。

由参考文献[1]74页例1知

$$B = \bigcup_{r=1}^{\infty} \overline{\lim} E(|f_n - f| \geq \frac{1}{r})$$

因此, 把 E 看成基本集合时, 有 $A = \mathcal{C} B$. 所以

$$\begin{aligned} A = \mathcal{C} B &= \mathcal{C} \left[\bigcup_{r=1}^{\infty} \overline{\lim} E(|f_n - f| \geq \frac{1}{r}) \right] \\ &= \mathcal{C} \left[\bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E(|f_n - f| \geq \frac{1}{r}) \right] \\ &= \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \left[\mathcal{C} E(|f_n - f| \geq \frac{1}{r}) \right] \\ &= \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E(|f_n - f| < \frac{1}{r}) \\ &= \bigcap_{r=1}^{\infty} \underline{\lim} E(|f_n - f| < \frac{1}{r}) \end{aligned}$$

故集 $\bigcap_{r=1}^{\infty} \underline{\lim} E(|f_n - f| < \frac{1}{r})$ 是 E 中使 $f_n(x)$ 收敛于 $f(x)$

的点所成之集。

7. 设 E 是 $[0, 1]$ 中的一个不可测集, 令

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in E \\ -x & x \notin E \end{cases}$$

问 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是否可测? $|f(x)|$ 是否可测?

解 设 $I = [0, 1]$, 则 $I(f(x) > 0) = E - \{0\}$. 因为 E

不可测。所以 $E - \{0\}$ 也不可测，故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可测。

而 $|f(x)| = x$, $x \in [0,1]$, 是 $[0,1]$ 上的连续函数，所以 $|f(x)|$ 必在 $[0,1]$ 上可测。

8. 设 $\{f_n\}$ 是 E 上可测函数列。试证它的收敛点集与发散点集都是可测的。

证 设 $\{f_n\}$ 的收敛点集为 A ，发散点集为 B ，则

$$A = E \left(\overline{\lim} f_n = \underline{\lim} f_n \right)$$

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} E \left(\left| \overline{\lim} f_n - \underline{\lim} f_n \right| < \frac{1}{k} \right)$$

因为 $\{f_n\}$ 是 E 上可测函数列，所以 $\overline{\lim} f_n$ 与 $\underline{\lim} f_n$ 皆 E 上可测函数，从而 $\left| \overline{\lim} f_n - \underline{\lim} f_n \right|$ 也是 E 上可测函数。

于是对任何自然数 k ， $E \left(\left| \overline{\lim} f_n - \underline{\lim} f_n \right| < \frac{1}{k} \right)$ 是可测集，故 $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} E \left(\left| \overline{\lim} f_n - \underline{\lim} f_n \right| < \frac{1}{k} \right)$ 是可测集。

而 $B = E - A$ ，所以 $\{f_n\}$ 的发散点集也必定是可测集。

9. 试作 $E = [0,1]$ 上的可测函数 $f(x)$ ，使对任何连续函数 $g(x)$ 有 $mE(f \neq g) \neq 0$ 。此结果与鲁津定理有无矛盾？

解 令

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in (0,1] \\ +\infty & x = 0 \end{cases}$$

显然, $f(x)$ 在 $E = [0, 1]$ 上可测。设 $g(x)$ 是 $E = [0, 1]$ 上的任一连续函数, 则 $g(x)$ 必在 E 上有界。故存在 $M > 1$, 使当 $x \in E$ 时, 恒有 $|g(x)| \leq M$ 。

在 $[0, \frac{1}{M})$ 上, 因为 $f(x) > M$, 所以在 $[0, \frac{1}{M})$ 上 $f(x) \neq g(x)$ 。故 $E(f \neq g) \supset [0, \frac{1}{M})$, 于是 $mE(f \neq g) \geq \frac{1}{M} > 0$ 。即对任何连续函数 $g(x)$ 都有 $mE(f \neq g) \neq 0$ 。

此结果与鲁津定理并无矛盾。

事实上, 对任给的 $\varepsilon > 0$ (不妨设 $\varepsilon < \frac{1}{2}$), 存在闭集 $F = [\frac{\varepsilon}{2}, 1] \subset E$, $m(E - F) = m[0, \frac{\varepsilon}{2}] = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ 。而所作的函数 $f(x)$ 在 F 上显然连续。

10. 设 $f(x)$ 是 $-\infty < x < +\infty$ 上的连续函数, $g(x)$ 是 $a \leq x \leq b$ 上的可测函数, 则 $f(g(x))$ 是可测函数。

证 记 $E = [a, b]$, $R^1 = (-\infty, +\infty)$ 。

因为 $f(x)$ 在 R^1 上连续, 所以对任意实数 C 有 $R^1(f > C) = G_0$ 是开集。

由于 $E(f(g(x)) > c) = E(g(x) \in G_0)$, 而 $g(x)$ 是 E 上的可测函数, 所以 $E(g(x) \in G_0)$ 是可测集, 从而 $E(f(g(x)) > c)$ 可测, 故 $f(g(x))$ 是集 E 上的可测函数。

11. 设 $f_n(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数列, 而 $f_n(x)$ 几乎处处收敛, 则存在常数 C 与正测度集合 $E_0 \subset E$, 使在 E_0 上, 对一切 n , 有 $|f_n(x)| \leq C$ 。

证 由题意知, 显然应该有 $mE > 0$, 且可假设 E 有界 (否则任取 E 的有界可测子集 A , 使 $0 < mA < +\infty$, 而用 A 去代替 E)。

证法一:

设 E 中使 f_n 不收敛的点所成之集为 Q , 则 $mQ = 0$, E 中使 $|f_n| = +\infty$ 的点所成之集为 E_n , 则 $mE_n = 0$, ($n = 1, 2, 3, \dots$), 于是 $m \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = 0$.

令 $B = E - \left[Q \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \right]$, 则 $mB = mE > 0$, 任取 $x_0 \in B$, 则 $f_n(x_0)$ 对一切 n 都是有限数。因为 $\{f_n(x_0)\}$ 是收敛数列, 所以 $\sup_n |f_n(x_0)|$ 也必定是有限数。

于是

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B \left(\sup_n |f_n| \leq k \right)$$

因为

$$B \left(\sup_n |f_n| \leq k \right) \subset B \left(\sup_n |f_n| \leq k+1 \right)$$

所以

$$mB = \lim_{k \rightarrow \infty} mB \left(\sup_n |f_n| \leq k \right)$$

故存在自然数 K_0 , 使

$$mB \left(\sup_n |f_n| \leq k_0 \right) > \frac{1}{2} mB$$

令 $E_0 = B \left(\sup_n |f_n| \leq k_0 \right)$, $C = k_0$, 则 $mE_0 > 0$ 且 对

任何 $x \in E_0$ 及一切 n , 都有 $|f_n(x)| \leq C$.

证法二:

因为 f_n 在 E 上几乎处处收敛, 设其极限函数为 $f(x)$, 则

根据叶果洛夫定理, 对 $\delta = \frac{mE}{4}$, 存在集 $E_\delta \subset E$, 使 $m(E - E_\delta) < \delta = \frac{mE}{4}$, 而在 E_δ 上, f_n 一致收敛到 $f(x)$ 。此时必有 $mE_\delta > \frac{3}{4}mE$, 且 $f(x)$ 在 E_δ 上可测。

再由鲁津定理, 对 $\varepsilon = \frac{mE}{4}$, 存在闭集 $F \subset E_\delta$, $m(E_\delta - F) < \frac{mE}{4}$, 即 $mF > \frac{mE}{2}$, 使 $f(x)$ 在 F 上连续。因为 $f(x)$ 在有界闭集 F 上连续, 必有界。所以存在 $M > 0$, 当 $x \in F$ 时恒有 $|f(x)| < M$ 。

因为 f_n 在 F 上一致收敛到 $f(x)$, 所以存在 N , 当 $n > N$ 时, 在 F 上恒有 $|f_n - f| < 1$, 从而 $|f_n| < M + 1$, 即 $n > N$ 时, 在 F 上 $|f_n| < M + 1$ 一致地成立。

下面再来处理 $f_1, f_2, f_3, \dots, f_N$ 。

因为 $f_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 几乎处处有限, 所以

$$mE(|f_i| = +\infty) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

又 $E(|f_i| > r) \supset E(|f_i| > r+1)$ 对 $i = 1, 2, \dots, N$ 及一切自然数 r 成立, 而

$$E(|f_i| = +\infty) = \bigcap_{r=1}^{\infty} E(|f_i| > r)$$

所以对每一个固定的 i , 有

$$\lim_{r \rightarrow \infty} E(|f_i| > r) = \bigcap_{r=1}^{\infty} E(|f_i| > r)$$

于是

$$\lim_{r \rightarrow \infty} mE(|f_i| > r) = 0$$

故对每一个固定的 i , 存在相应的 r_i , 使

$$mE(|f_i| > r_i) < \frac{mF}{N}$$

取 $r_0 = \max(r_1, r_2, r_3, \dots, r_N)$, 则 $mE(|f_i| > r_0) < \frac{mF}{N}$

对任何 i 成立 ($i = 1, 2, 3, \dots, N$), 故

$$m \bigcup_{i=1}^N E(|f_i| > r_0) \leq \sum_{i=1}^N mE(|f_i| > r_0) < mF$$

令 $E_0 = F - \bigcup_{i=1}^N E(|f_i| > r_0)$, $C = \max(M+1, r_0)$, 则

$mE_0 > 0$, 且在 E_0 上恒有 $|f_n(x)| \leq C$ 对一切 n 成立。

12. 设函数列 $f_n(x)$ 在 E 上测度收敛于 $f(x)$, 且 $f_n(x) \leq g(x)$ 在 E 上几乎处处成立, $n = 1, 2, 3, \dots$. 试证 $f(x) \leq g(x)$ 在 E 上几乎处处成立。

证 因为函数列 $f_n(x)$ 测度收敛于 $f(x)$, 所以存在子函数列 f_{n_k} 几乎处处收敛到 $f(x)$. 令

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_-(f_n > g) \cup E(f_{n_k} \nrightarrow f)$$

则 $mA = 0$. 而在 $E_0 = E - A$ 上, 恒有 $f_{n_k} \leq g$ 且 f_{n_k} 收敛于 f .

所以 $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) \leq g(x)$ 在 E_0 上处处成立, 故 $f(x) \leq g(x)$ 在 E 上几乎处处成立。

13. 设函数列 $f_n(x)$ 在有界集 E 上近一致收敛于 $f(x)$, 试证 $f_n(x)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$.

证 因为 $f_n(x)$ 在 E 上近一致收敛于 $f(x)$, 所以对任何自然数 r , 存在可测集 $E_r \subset E$, $mE_r < \frac{1}{r}$, 在 $E - E_r$ 上 $f_n(x)$

一致收敛于 $f(x)$ 。

令 $E_0 = \bigcap_{r=1}^{\infty} E_r$, 则 $E_0 \subset E_r$ 对一切 r 成立, 所以 $mE_0 \leq mE_r < \frac{1}{r}$ 对一切自然数 r 成立, 故 $mE_0 = 0$ 。

$$\begin{aligned} \text{又 } E - E_0 &= E \cap \mathcal{C}E_0 = E \cap \left(\mathcal{C} \bigcap_{r=1}^{\infty} E_r \right) \\ &= E \cap \left(\bigcup_{r=1}^{\infty} \mathcal{C}E_r \right) = \bigcup_{r=1}^{\infty} (E \cap \mathcal{C}E_r) \\ &= \bigcup_{r=1}^{\infty} (E - E_r) \end{aligned}$$

所以任取 $x_0 \in E - E_0$, 必存在 r_0 使 $x_0 \in E - E_{r_0}$, 从而 $f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$ 。故 $f_n(x)$ 在 $E - E_0$ 上处处收敛于 $f(x)$ 。而 $mE_0 = 0$, 所以 $f_n(x)$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$ 。

14. 设 $f_n(x)$ 测度收敛于 $f(x)$, 而 $f_n(x) \sim g_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, 则有 $g_n(x)$ 测度收敛于 $f(x)$ 。

证 为叙述方便, 设在可测集 E 上讨论问题。

令 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n \neq g_n)$, 则 $mA = 0$, 任给 $\sigma > 0$, 因为

$$E(|g_n - f| \geq \sigma) \subset E(|f_n - f| \geq \sigma) \cup A$$

所以

$$mE(|g_n - f| \geq \sigma) \leq mE(|f_n - f| \geq \sigma)$$

对任何 n 成立。

由于 $f_n(x)$ 测度收敛于 $f(x)$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} mE(|f_n - f| \geq \sigma) = 0$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} mE(|g_n - f| \geq \sigma) = 0$$

故在 E 上也有 $g_n(x)$ 测度收敛于 $f(x)$ 。

15. 设 $f_n(x)$ 测度收敛于 $f(x)$ ，且 $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ 几乎处处成立， $n=1, 2, 3, \dots$ 。则几乎处处有 $f_n(x)$ 收敛于 $f(x)$ 。

证 为叙述方便，设在可测集 E 上讨论问题。

因为 $f_n(x)$ 测度收敛于 $f(x)$ ，所以存在子函数列 $f_{n_k}(x)$

在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$ 。令

$$A = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > f_{n+1}) \right] \cup E(f_{n_k} \nrightarrow f)$$

则 $mA = 0$ 。

设 $E_0 = E - A$ ，任取 $x_0 \in E_0$ ，则 $f_n(x_0) \leq f_{n+1}(x_0)$ 对任何 n 成立，且 $f_{n_k}(x_0) \rightarrow f(x_0)$ 。

因为 $\{f_n(x_0)\}$ 是单调递增数列，所以

$$f(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$$

即在 E_0 上处处有 $f_n(x)$ 收敛于 $f(x)$ ，所以在 E 上几乎处处有 $f_n(x)$ 收敛于 $f(x)$ 。

16. 设 $mE < \infty$ ，几乎处处有限的可测函数列 $f_n(x)$ ， $g_n(x)$ 分别测度收敛于 $f(x)$ ， $g(x)$ 。试证 $f_n(x) \cdot g_n(x)$ 测度收敛于 $f(x) \cdot g(x)$ 。

提示 用公式 $ab = \frac{1}{4} \{ (a+b)^2 - (a-b)^2 \}$ 。

证 首先证明，若 $f_n(x)$ 测度收敛于 $f(x)$ ，则 $f_n^2(x)$ 必

测度收敛于 $f^2(x)$ 。

用反证法 若 f_n^2 不依测度收敛于 f^2 ，则存在 $\sigma_0 > 0$ ，使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} mE(|f_n^2 - f^2| \geq \sigma_0) \neq 0$$

于是必有子函数列 $\{f_{n_k}\}$ ，满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} mE(|f_{n_k}^2 - f^2| \geq \sigma_0) = l > 0$$

另一方面，因 f_n 测度收敛于 f ， f_{n_k} 也必测度收敛于 f ，

于是存在子列 $f_{n'_k}$ 几乎处处收敛到 f 。所以 $f_{n'_k}^2$ 也几乎处处收敛到 f^2 ，从而 $f_{n'_k}^2$ 测度收敛到 f^2 ，这与 $\lim_{k \rightarrow \infty} mE(|f_{n'_k}^2 - f^2|$

$\geq \sigma_0) = l > 0$ 相矛盾，所以 f_n^2 测度收敛于 f^2 。

其次再完成本题结论的证明。

因 f_n 测度收敛于 f ， g_n 测度收敛于 g ，所以 $f_n \pm g_n$ 测度收敛于 $f \pm g$ ，从而 $(f_n \pm g_n)^2$ 测度收敛于 $(f \pm g)^2$ 。

于是

$$f_n \cdot g_n = \frac{1}{4} \left\{ (f_n + g_n)^2 - (f_n - g_n)^2 \right\}$$

依测度收敛到

$$\frac{1}{4} \left\{ (f + g)^2 - (f - g)^2 \right\} = f \cdot g$$

17. (1) $E_k (k = 1, 2, 3 \cdots)$ 皆可测集， $E = \bigcup_k E_k$ ，试证，

$f(x)$ 在 E 上可测的充要条件是： $f(x)$ 在每个 $E_k (k = 1, 2, 3, \cdots)$ 上可测。

(2) 若 $E_\lambda (\lambda \in A)$ 皆可测集， A 为不可列的指标集

$E = \bigcup_{\lambda \in A} E_\lambda$. (1)中的结论是否仍旧成立? 为什么?

提示: (2)结论不再成立。

例如, 取 $E_\lambda = \{\lambda\}$, $\lambda \in [0, 1] = A$. B 是 A 的任一不可测子集, 且假定 $0 \in B$. 则

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in B \\ -x & x \in A - B \end{cases}$$

在每个 E_λ 上可测, 而在 $E = \bigcup_{\lambda \in A} E_\lambda$ 上不可测。

18. 设 $f(x)$ 在 E 上可测, $\varphi(y)$ 是 $f(E)$ 上的单调函数, 则 $\varphi(f(x))$ 在 E 上可测。

19. 设 $f(x)$ 在 E 上可测, B 是 R^1 上的波雷尔集。试证 $f^{-1}(B)$ 是可测集。

若 A 是 R^1 上任意可测集, 问 $f^{-1}(A)$ 是否必定可测?

提示 (1) 当 G 是开区间、开集、闭集时, 分别证明 $f^{-1}(G)$ 可测, 再证 $f^{-1}(B)$ 可测。

(2) 当 A 是 R^1 上任意可测集时, $f^{-1}(A)$ 不一定可测。

例 设 P_0 是康托完备集, 称其长为 $\frac{1}{3^K}$ 的余区间为第 K

级余区间。第 K 级余区间从左往右数的第 i 个记作 δ_i^K 。

定义

$$\varphi(x) = \begin{cases} x + \frac{2i-1}{2^K} & \text{当 } x \in \delta_i^K \text{ 时, } K=1, 2, 3, \dots \\ & i=1, 2, 3, \dots, 2^{K-1} \\ x + \sup_{\xi < x, \xi \in [0, 1] - P_0} \{\varphi(\xi)\} & \text{当 } x \in P_0 \text{ 时} \end{cases}$$

可以证明, $\varphi(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且严格单调递增。

设 $\varphi(P_0) = F$, 则 $mF = 1$ 。以 A_0 表示 F 的任一不可测子集, f 表示 φ 的反函数, 显然 f 是 $[0, 2]$ 上的可测函数且 $A = f(A_0) \subset P_0$, 故 A 可测, 但 $f^{-1}(A) = A_0$ 却不可测。

20. 设 E 是 R^1 上有界可测集, $f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 有闭集 $F \subset E$ 及 $g(x) \in C_{R^1}$, 使

(1) 当 $x \in F$ 时, $f(x) = g(x)$;

(2) $m(E - F) < \varepsilon$ 。

提示 由鲁津定理得所需的闭集 F , 并设含 F 的最小闭区间为 $[c, d]$, $[c, d] - F = \bigcup_i (c_i, d_i)$, 于是

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x \leq a \text{ 或 } x \geq b \text{ 时} \\ f(x) & \text{当 } x \in F \text{ 时} \\ f(c) \cdot \frac{x-a}{c-a} & \text{当 } x \in (a, c) \text{ 时} \\ f(d) \cdot \frac{b-x}{b-d} & \text{当 } x \in (d, b) \text{ 时} \\ f(c_i) + \frac{f(d_i) - f(c_i)}{d_i - c_i} (x - c_i) & \text{当 } x \in (c_i, d_i) \text{ 时} \end{cases}$$

即为所求。

21. E 是 R^1 上有界可测集, $f(x)$ 在 E 上几乎处处有限, 则 $f(x)$ 在 E 上可测的充要条件是: 有 R^1 上的连续函数列 $\{\varphi_n(x)\}$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ 在 E 上几乎处处成立。

22. 鲁津定理中, 将连续函数改为多项式, 成立不成立? 为什么?

提示 不成立。

不妨设 $E = [0, 1]$, $f(x) = \sin x$, 若对 $\varepsilon > 0$, 有闭集 $F \subset [0, 1]$, $mF > 1 - \varepsilon$, 使得在 F 上

$$f(x) = \sin x = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

则在 F 上 $\sin x - (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)$ 的任何阶导数都将为 0, 表明 $\sin x$ 或 $\cos x$ 将在 $[0, 1]$ 上有无限多个 0 点, 这显然是不可能的。

23. 设 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上几乎处处有限的可测函数, 则对于任意的 $\varepsilon > 0$ 及 $\delta > 0$, 恒有闭集 $F \subset [a, b]$ 及多项式 $P(x)$, 使 $mF > b - a - \delta$, 而在 F 上 $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$.

24. 鲁津定理中, 如果取 $\varepsilon = 0$ 结论还对不对? 为什么?

提示 结论未必成立。

例如, 取 $E = [0, 1]$, 无处稠密集 A 满足 $mA > 0$ 且 $A \subset E$, 作函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in E - A \end{cases}$$

则不管 E_0 是 E 中什么样的零测度集, $f(x)$ 在 $E - E_0$ 上都不可能连续。

31. $mE < +\infty$, f 及 f_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) 是 E 上几乎处处有限的可测函数。试证, f_n 在 E 上依测度收敛于 f 的充要条件是: $\{f_n\}$ 的任一子序列 $\{f_{n_k}\}$ 中, 存在子序列 $\{f_{n_{k'}}\}$ 使

$$\lim_{k' \rightarrow \infty} f_{n_{k'}} = f \text{ 在 } E \text{ 上几乎处处成立。}$$

提示 充分性的证明可采用反证法。

32. 设 $f(x)$, $g(x)$ 都是 E 上可测函数, $g(x) \in L$, 且几乎处处成立 $f(x) \leq g(x)$, 问 $f(x)$ 是否可积?

解 $f(x)$ 未必可积, 例如;

设

$$E = [0, 1], \quad g(x) = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} -2 & x \in (\frac{1}{2}, 1] \\ -4 & x \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \vdots & \vdots \\ -2^n & x \in (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}] \\ \vdots & \vdots \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

显然 $g(x) \in L$, $f(x) \leq g(x)$ 。但

$$\int_{[0,1]} f(x) dm = \sum_{k=1}^{\infty} (-2^k) \frac{1}{2^k} = -\infty$$

[注] 若还存在 $\mathcal{F}(x) \in L$, 使 $\mathcal{F}(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 则 $f(x) \in L$ 。

33. 设 $f(x)$ 于 E 上可积, 令 $E_n = E(|f| \geq n)$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} mE_n = 0$$

证法一 因为 $f(x)$ 在 E 上可积, 所以

$$\int_E |f(x)| dm = S < \infty$$

但

$$S \geq \int_{E_n} |f(x)| dm \geq \int_{E_n} n dm = n \cdot mE$$

所以

$$mE_n \leq \frac{1}{n} S$$

故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} mE_n = 0$$

证法二 根据可积函数必几乎处处有限, 得

$$mE(|f| = +\infty) = 0$$

但 $E(|f| = +\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, 且 $\{E_n\}$ 为一渐缩可测集列, 由

参考文献 [1] 第二章定理 3.6 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} mE_n = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = mE(|f| = \infty) = 0$$

34. 设在康托闭集 P_0 上定义函数 $f(x)$ 为零, 而在 P_0 的补集中长为 $\frac{1}{3^n}$ 的构成区间上定义 $f(x)$ 为 n ($n=1, 2, 3, \dots$), 试证 $f \in L$, 并求积分值。

证 令 e_n 为 G_0 中长为 $\frac{1}{3^n}$ 的各开区间之并 ($n=1, 2, 3, \dots$), 则

$$G_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n \quad mE_n = \frac{2^{n-1}}{3^n}$$

$$\text{令 } f_n(x) = \begin{cases} i & x \in e_i (i=1, 2, \dots, n) \\ 0 & x \in [0, 1] - \bigcup_{i=1}^n e_i \end{cases}$$

则简单函数列 $\{f_n(x)\}$ 满足

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in [0, 1]$$

由参考文献 [1] 第四章的基本引理的注得

$$\int_{[0,1]} f(x) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_n(x) dm$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n i \frac{2^{i-1}}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{2^{i-1}}{3^i} = 3$$

这就证明了 $f(x) \in L$, 且其积分值为 3.

35. 设 $f(x) \geq 0$ 为可测函数, 令

$$\{f(x)\}_n = \begin{cases} f(x) & \text{若 } f(x) \leq n \\ 0 & \text{若 } f(x) > n \end{cases}$$

则当 $f(x)$ 几乎处处有限时, 有

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} \{f(x)\}_n dm = \int_{\mathbb{R}} f(x) dm$$

证 令 $A = E(f = \infty)$, 则 $mA = 0$. 于是

$$\int_A f(x) dm = 0 \quad \int_A \{f(x)\}_n dm = 0$$

故有

$$\lim_n \int_A \{f(x)\}_n dm = \int_A f(x) dm$$

在 $E - A$ 上, 令

$$u_n(x) = \begin{cases} f(x) & n-1 < f(x) \leq n \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

则

$$\{f(x)\}_n = \sum_{k=1}^n u_k(x) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

由参考文献[1]第四章定理3.1, 得

$$\int_{\mathbb{R}-A} f(x) dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}-A} u_k(x) dm$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{B-A} u_k(x) dm = \lim_n \int_{B-A} \{f(x)\}_n dm$$

因此

$$\begin{aligned} & \lim_n \int_B \{f(x)\}_n dm \\ &= \lim_n \int_A \{f(x)\}_n dm + \lim_n \int_{B-A} \{f(x)\}_n dm \\ &= \int_A f(x) dm + \int_{B-A} f(x) dm = \int_B f(x) dm \end{aligned}$$

36. 设由 $[0, 1]$ 中取出 n 个可测子集 E_1, E_2, \dots, E_n . 假定 $[0, 1]$ 中任一点至少属于这 n 个集中的 q 个, 试证必有一集, 它的测度大于或等于 q/n .

$$\text{证 令 } \mathcal{S}(x) = \sum_{k=1}^n X_{E_k}(x) \quad x \in [0, 1]$$

其中 $X_{E_k}(x)$ 表示 E_k 的特征函数。由题设 $\mathcal{S}(x) \geq q$, 于是得

$$\begin{aligned} q &= \int_{[0, 1]} q dm \leq \int_{[0, 1]} \mathcal{S}(x) dm \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{[0, 1]} X_{E_k}(x) dm = \sum_{k=1}^n mE_k \end{aligned}$$

因此, E_1, E_2, \dots, E_n 中必有一集, 它的测度不小于 q/n .

37. 勒维定理中去掉函数列的非负性假定, 结论是否成立?

解 未必成立。例如在 $[0, 1]$ 上定义

$$f_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{nx} & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$f(x) = 0$$

则有 $f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots$

$$\lim_n f_n(x) = f(x)$$

但

$$\int_{[0,1]} f_n(x) dm = -\infty \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$\int_{[0,1]} f(x) dm = 0$$

显然 $\lim_n \int_{[0,1]} f_n(x) dm = \int_{[0,1]} f(x) dm$ 的结论不成立。

[注] 容易证明,若存在 $g(x) \in L$ 满足 $g(x) \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots$, 则勒维定理的结论仍成立。

38. 设 $mE > 0$, 又设 E 上可积函数 $f(x)$, $g(x)$ 满足 $f(x) \leq g(x)$, 试证

$$\int_E f(x) dm \leq \int_E g(x) dm$$

证 因为 $g(x) - f(x) \geq 0$, 所以

$$\int_E [g(x) - f(x)] dm \geq 0$$

若

$$\int_E [g(x) - f(x)] dm = 0$$

则

$$g(x) - f(x) \sim 0$$

与题设矛盾, 故得

$$\int_E f(x) dm < \int_E g(x) dm$$

39. 设 $f(x)$ 为 E 上可积函数, 如果对任何有界可测函数 $\varphi(x)$, 都有

$$\int_E f(x)\varphi(x)dm = 0$$

则 $f \sim 0$.

证 令

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \in E(f \geq 0) \\ -1 & x \in E(f < 0) \end{cases}$$

因为

$$E(\varphi > \alpha) = \begin{cases} \emptyset & \alpha \geq 1 \\ E(f \geq 0) & -1 \leq \alpha < 1 \\ E & \alpha < -1 \end{cases}$$

所以 $\varphi(x)$ 为 E 上的有界可测函数。由题设, 有

$$\int_E f(x)g(x)dm = \int_E |f(x)|dm = 0$$

根据唯一性定理, 得 $f \sim 0$.

40. 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的可积函数。若对任何 $c (0 < c < 1)$ 恒有

$$\int_{(0,c)} f(x)dm = 0$$

则 $f \sim 0$.

证法一 由题设, 显然有

$$\int_{(0,1)} f(x)dm = 0$$

于是对任何开区间 $(\alpha, \beta) \subset (0, 1)$, 有

$$\int_{(\alpha,\beta)} f(x)dm = \int_{(0,\beta)} f(x)dm - \int_{(0,\alpha)} f(x)dm = 0$$

从而可知, 对任何开集 $G = \bigcup_k (\alpha_k, \beta_k)$, 有

$$\int_E f(x)dm = \sum_k \int_{(\alpha_k, \beta_k)} f(x)dm = 0$$

对于 $(0,1)$ 中的任意闭集 F , $G = (0,1) - F$ 是 $(0,1)$ 中的开集, 有

$$\int_F f(x) dm = \int_{(0,1)} f(x) dm - \int_G f(x) dm = 0$$

若在 $E = (0,1)$ 上, $f \sim 0$ 不成立, 令

$$E_1 = E(f > 0) \quad E_2 = E(f < 0)$$

则 mE_1 , mE_2 中至少有一个大于零. 不妨设 $mE_1 > 0$, 由测度的定义, 必存在闭集 $F_0 \subset E_1 \subset (0,1)$, 使 $mF_0 > 0$, 而在 F_0 上, $f(x) > 0$, 由本章第38题知

$$\int_{F_0} f(x) dm > 0$$

得出矛盾, 因此 $f \sim 0$.

证法二 根据积分的绝对连续性, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $e \subset E = (0,1)$, $me < \delta$ 时,

$$\left| \int_e f(x) dm \right| < \varepsilon$$

对于 E 中任意一个可测集 S , 必存在 $(0,1)$ 中的开集 $G \supset S$, 使 $m(G - S) < \delta$, 于是

$$\left| \int_{G-S} f(x) dm \right| < \varepsilon$$

因此

$$\begin{aligned} \left| \int_S f(x) dm \right| &= \left| \int_G f(x) dm - \int_{G-S} f(x) dm \right| \\ &= \left| \int_{G-S} f(x) dm \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

由 ε 的任意性, 知

$$\int_S f(x) dm = 0$$

即在 E 中的任一可测集 S 上的积分都为0. 特别地, 对任一自

然数 n ,

$$\int_{E(f > 1/n)} f(x) dm = 0$$

但

$$\int_{E(f > 1/n)} f(x) dm \geq \frac{1}{n} mE(f \geq \frac{1}{n})$$

所以

$$mE(f \geq \frac{1}{n}) = 0$$

由于 $-f(x)$ 同 $f(x)$ 一样符合题设条件, 所以

$$mE(-f \geq \frac{1}{n}) = 0$$

即

$$mE(f \leq -\frac{1}{n}) = 0$$

故有

$$mE(|f| \geq \frac{1}{n}) = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

因为

$$E(f \neq 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(|f| \geq \frac{1}{n})$$

所以

$$mE(f \neq 0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} mE(|f| \geq \frac{1}{n}) = 0$$

即 $f \sim 0$.

41. 证明 $\int_{(0,1)} \frac{x^p}{1-x} \ln \frac{1}{x} dm = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^2} \quad (p > -1)$

证 在 $(0, 1)$ 上, $\frac{x^p}{1-x} \ln \frac{1}{x} = - \sum_{n=0}^{\infty} x^{p+n} \ln x,$

由参考文献[1]第四章定理3.1, 得

$$\begin{aligned} \int_{(0,1)} \frac{x^p}{1-x} \ln \frac{1}{x} dm &= - \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(0,1)} x^{p+n} \ln x dm \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} (R) \int_0^1 x^{p+n} \ln x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(p+n+1)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^2} \end{aligned}$$

42. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_0^1 \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^5 nx dx$

解 因为 $\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^5 nx$ 在 $[0,1]$ 上连续, 所以在 $[0,1]$ 上 R 可积, 又因为

$$\begin{aligned} \left| \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^5 nx \right| &\leq \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} = \frac{nx}{1+n^2x^2} x^{-\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \in L[0,1] \end{aligned}$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^5 nx = 0 \quad x \in [0,1]$$

由勒贝格控制收敛定理, 得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_0^1 \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^5 nx dx \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_{[0,1]} \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^5 nx dm \end{aligned}$$

$$= \int_{[0,1]} 0 \, dm = 0$$

43. 设 $f_n(x)$ 是 E 上可积函数, $f_n(x)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$, 且

$$\int_E |f_n(x)| \, dm < K \quad K \text{ 为常数}$$

则 $f(x)$ 可积。

证 设 $E_0 = E(f_n \rightarrow f)$, 则

$$m(E - E_0) = 0 \quad \int_{E - E_0} |f(x)| \, dm = 0$$

在 E_0 上, $|f_n(x)| \rightarrow |f(x)|$ ($n \rightarrow \infty$), 由法杜定理, 得

$$\int_{E_0} |f(x)| \, dm \leq \liminf_n \int_{E_0} |f_n(x)| \, dm \leq K$$

所以

$$\int_E |f(x)| \, dm = \int_{E_0} |f(x)| \, dm \leq K$$

即 $f(x)$ 在 E 上可积。

44. 设 $f(x)$, $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 都是 E 上可积函数, $f_n(x)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$, 且

$$\int_E |f_n(x)| \, dm \rightarrow \int_E |f(x)| \, dm$$

试证, 在任意可测子集 $e \subset E$ 上,

$$\int_e |f_n(x)| \, dm \rightarrow \int_e |f(x)| \, dm$$

证 由法杜定理, 有

$$\int_e |f(x)| dm \leq \lim_n \int_e |f_n(x)| dm$$

及

$$\int_{E-e} |f(x)| dm \leq \lim_n \int_{E-e} |f_n(x)| dm$$

由数列极限的性质 “ $\lim_n (x_n + y_n) = \lim_n x_n + \overline{\lim_n y_n}$ ”,

得

$$\begin{aligned} \int_e |f(x)| dm &= \int_E |f(x)| dm - \int_{E-e} |f(x)| dm \\ &= \lim_n \int_E |f_n(x)| dm - \int_{E-e} |f(x)| dm \\ &\geq \lim_n \left\{ \int_e |f_n(x)| dm + \int_{E-e} |f_n(x)| dm \right\} \\ &\quad - \lim_n \int_{E-e} |f_n(x)| dm = \overline{\lim_n} \int_e |f_n(x)| dm \\ &\quad + \lim_n \int_{E-e} |f_n(x)| dm - \lim_n \int_{E-e} |f_n(x)| dm \\ &= \overline{\lim_n} \int_e |f_n(x)| dm \end{aligned}$$

综上所述得

$$\begin{aligned} \overline{\lim_n} \int_e |f_n(x)| dm &\leq \int_e |f(x)| dm \\ &\leq \lim_n \int_e |f_n(x)| dm \end{aligned}$$

所以, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_e |f_n(x)| dm = \int_e |f(x)| dm$$

45. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上可积, 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{(-\infty, \infty)} |f(x+h) - f(x)| dm = 0$$

证 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可积, 所以对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N_0 , 使

$$\int_{(-\infty, -N_0+1)} |f(x)| dm < \frac{\varepsilon}{8} \quad \int_{(N_0-1, \infty)} |f(x)| dm < \frac{\varepsilon}{8}$$

于是, 当 $|h| < 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \int_{(-\infty, -N_0)} |f(x+h) - f(x)| dm &\leq \int_{(-\infty, -N_0)} |f(x+h)| dm \\ &+ \int_{(-\infty, -N_0)} |f(x)| dm < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

同样可证

$$\int_{(N_0, +\infty)} |f(x+h) - f(x)| dm < \frac{\varepsilon}{4}$$

因 $f(x)$ 在 $[-N_0-1, N_0+1]$ 上可积, 根据参考文献[1]第四章定理2.8, 存在连续函数 $g(x)$, 使

$$\int_{[-N_0-1, N_0+1]} |f(x) - g(x)| dm < \frac{\varepsilon}{6}$$

由 $g(x)$ 在 $[-N_0-1, N_0+1]$ 上的一致连续性, 存在 $0 < \delta < 1$, 使当 $|h| < \delta$ 时, 对一切 $x \in [-N_0, N_0]$ 有

$$|g(x+h) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{12N_0}$$

于是

$$\int_{[-N_0, N_0]} |g(x+h) - g(x)| dm \leq \int_{[-N_0, N_0]} \frac{\varepsilon}{12N_0} dm = \frac{\varepsilon}{6}$$

从而

$$\begin{aligned} & \int_{[-N_0, N_0]} (|f(x+h) - f(x)|) dm \\ & \leq \int_{[-N_0, N_0]} |f(x+h) - g(x+h)| dm \\ & \quad + \int_{[-N_0, N_0]} |g(x+h) - g(x)| dm \\ & \quad + \int_{[-N_0, N_0]} |g(x) - f(x)| dm < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

于是当 $|h| < \delta$ ($\delta < 1$) 时,

$$\begin{aligned} & \int_{(-\infty, \infty)} |f(x+h) - f(x)| dm \\ & = \int_{(-\infty, -N_0)} |f(x+h) - f(x)| dm \\ & \quad + \int_{[-N_0, N_0]} |f(x+h) - f(x)| dm \\ & \quad + \int_{(N_0, +\infty)} |f(x+h) - f(x)| dm \end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

即

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{(-\infty, \infty)} |f(x+h) - f(x)| dm = 0$$

46. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上的可积函数, 试证

$$f^{\wedge}(x) = \int_{(-\infty, \infty)} e^{-itx} f(t) dt$$

是 $(-\infty, \infty)$ 上的连续函数, 且

$$f^{\wedge}(x) = \frac{d}{dx} \int_{(-\infty, \infty)} \frac{e^{-itx} - 1}{-it} f(t) dt$$

证 对任何 $x \in R$,

$$\begin{aligned} f^{\wedge}(x + \Delta x) - f^{\wedge}(x) &= \int_{(-\infty, \infty)} \left[e^{-it(x+\Delta x)} - e^{-itx} \right] f(t) dt \end{aligned}$$

因为

$$\left| \left[e^{-it(x+\Delta x)} - e^{-itx} \right] f(t) \right| \leq 2|f(t)| \in L(-\infty, \infty)$$

由勒贝格控制收敛定理, 得

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[f^{\wedge}(x + \Delta x) - f^{\wedge}(x) \right] \\ &= \int_{(-\infty, \infty)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[e^{-it(x+\Delta x)} - e^{-itx} \right] f(t) dt = 0 \end{aligned}$$

此即 $f^{\wedge}(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上连续。

令

$$g(x) = \int_{(-\infty, \infty)} \frac{e^{-itx} - 1}{-it} f(t) dt$$

则

$$\begin{aligned} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} &= \int_{(-\infty, \infty)} \left[\frac{e^{-it(x+\Delta x)} - 1}{-it} - \frac{e^{-itx} - 1}{-it} \right] \frac{f(t)}{\Delta x} dt \\ &= \int_{(-\infty, \infty)} \frac{e^{-itx} (e^{-it\Delta x} - 1)}{-it} \frac{f(t)}{\Delta x} dt \end{aligned}$$

由微分学中值定理

$$\begin{aligned} &\left| \frac{e^{-itx} (e^{-it\Delta x} - 1)}{-it} \frac{f(t)}{\Delta x} \right| \\ &= \left| \frac{e^{-itx} e^{-it\theta\Delta x} (-it\Delta x)}{-it\Delta x} f(t) \right| \\ &\leq |f(t)| \in L(-\infty, \infty) \end{aligned}$$

其中 $0 < \theta < 1$, 再由勒贝格控制收敛定理, 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} g(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{(-\infty, \infty)} e^{-itx} e^{-it\theta\Delta x} f(t) dt \\ &= \int_{(-\infty, \infty)} e^{-itx} f(t) dt = \hat{f}(x) \end{aligned}$$

47. 设 $f(x)$ 是 (a, b) 上的可积函数, 试证

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{(a,b)} f(x) e^{itx} dx = 0$$

证 由于在 a, b 两点补充或改变函数值, 不改变函数的可积性和积分值, 故可将题中 (a, b) 改为 $[a, b]$ 。

(1) 当 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数时, 令

$$M = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续, 任给 $\varepsilon > 0$, 必有 $\delta > 0$, 使当 $x', x'' \in [a, b]$, $|x' - x''| < \delta$ 时, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

对 $[a, b]$ 作分割, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$, 使得 $|x_k - x_{k+1}| < \delta$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$), 则

$$\left| \int_{(a,b)} f(x) e^{itx} dx \right| = \left| \sum_{k=0}^{m-1} \int_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) e^{itx} dx \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m-1} \int_{[x_k, x_{k+1}]} [f(x) - f(x_k)] e^{itx} dx$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} \int_{[x_k, x_{k+1}]} f(x_k) e^{itx} dx$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_{[x_k, x_{k+1}]} |e^{itx}| dx$$

$$+ M \sum_{k=0}^{m-1} \left| \int_{[x_k, x_{k+1}]} e^{itx} dt \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{k=0}^{m-1} \int_{[x_k, x_{k+1}]} dx \\
&\quad + M \sum_{k=0}^{m-1} \left| \left[\frac{1}{it} e^{itx} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) + M \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2}{t} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2Mm}{t}
\end{aligned}$$

于是当 $t > \frac{4Mm}{\varepsilon}$ 时, 有

$$\left| \int_{(a,b)} f(x) e^{itx} dx \right| < \varepsilon$$

故有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{(a,b)} f(x) e^{itx} dx = 0$$

(2) 当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积时, 由参考文献[1]第四章定理2.8, 任给 $\varepsilon > 0$, 在 $[a, b]$ 上存在连续函数 $g(x)$, 满足

$$\int_{[a,b]} |f(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

由(1), 对于连续函数 $g(x)$, 存在 T , 使当 $t > T$ 时, 有

$$\left| \int_{[a,b]} g(x) e^{itx} dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

于是

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{[a,b]} f(x) e^{itx} dx \right| \\
& \leq \left| \int_{[a,b]} [f(x) - g(x)] e^{itx} dx \right| + \left| \int_{[a,b]} g(x) e^{itx} dx \right| \\
& < \int_{[a,b]} |f(x) - g(x)| dx + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

此即证明

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f(x) e^{itx} dx = 0$$

48. 设 $mE < \infty$, 则 $f(x)$ 在 E 上可积的充要条件是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} mE(|f| \geq n)$$

收敛。当 $mE = \infty$ 时, 结论是否成立?

证 设 $E_n = E(n \leq |f| < n+1)$, 则

$$n \cdot mE_n \leq \int_{E_n} |f(x)| dm \leq (n+1) mE_n$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot mE_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} |f(x)| dm \leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) mE_n$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot mE_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} mE_k = \sum_{n=1}^{\infty} mE(|f| \geq n)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) mE_n = \sum_{n=1}^{\infty} mE(|f| \geq n) + mE$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} mE(|f| \geq n) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} |f(x)| dm \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} mE(|f| \geq n) + mE \end{aligned}$$

若 $f(x)$ 在 E 上可积, 则 $f(x)$ 在 E 上几乎处处有限, 于是

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} mE(|f| \geq n) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} |f(x)| dm \\ &= \int_E |f(x)| dm < +\infty \end{aligned}$$

反之, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} mE(|f| \geq n) < \infty$, 则 $f(x)$ 在 E 上几乎处处有限。又据 $mE < \infty$, 得

$$\begin{aligned} \int_E |f(x)| dm &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} |f(x)| dm \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} m(|f| \geq n) + mE < +\infty \end{aligned}$$

若 $mE = \infty$, 则充分性不成立。例如, 设 $E = [1, \infty)$,

$f(x) = \frac{1}{x}$, 则有 $\sum_{n=1}^{\infty} mE(|f| \geq n) = 0$, 但 $f(x) \notin L(E)$ 。

但必要性仍成立, 这是因为, 当 $f(x) \in L$ 时, 若令 $E_0 =$

$E(|f| \geq 1)$, 则 $mE_0 < \infty$, 且 $f \in L(E_0)$, 由此得

$$\sum_{n=1}^{\infty} mE_0(|f| \geq n) < \infty$$

但 $mE_0(|f| \geq n) = mE(|f| \geq n) \quad n = 1, 2, \dots$
于是, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} mE(|f| \geq n) < \infty$$

49. 设 $f(x)$, $g(y)$ 分别是定义在集 X , Y 上的 μ , γ 可积函数, 则 $h(x, y) = f(x)g(y)$ 是乘积空间 $X \times Y$ 上的可积函数, 且有

$$\int_{X \times Y} h d(\mu \times \gamma) = \int_X f d\mu \int_Y g d\gamma$$

证 (1) 当 $f(x) = \chi_{E_1}(x)$, $g(y) = \chi_{E_2}(y)$, 其中 E_1 , E_2 分别为集 X , Y 上的 μ , γ 可测集时,

$$h(x, y) = \chi_{E_1 \times E_2}(x, y)$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} h d(\mu \times \gamma) &= \mu(E_1) \gamma(E_2) \\ &= \int_X f d\mu \int_Y g d\gamma \end{aligned}$$

(2) 当 $f(x)$, $g(y)$ 分别为 X , Y 上的简单函数时, 设

$$f(x) = \sum_{k=1}^m a_k \chi_{E_k}(x) \quad g(y) = \sum_{j=1}^n b_j \chi_{E_j}(y)$$

则

$$h(x, y) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n a_k b_j \chi_{E_k \times E_j}(x, y)$$

为 $X \times Y$ 上的简单函数, 由(1), 有

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} h(x, y) d(\mu \times \gamma) &= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n a_k b_j \mu(E_k) \gamma(E_j) \\ &= \sum_{k=1}^m a_k \mu(E_k) \sum_{j=1}^n b_j \gamma(E_j) \\ &= \int_X f(x) d\mu \int_Y g(y) d\gamma \end{aligned}$$

(3) 当 $f(x) \geq 0$, $g(y) \geq 0$ 时, 因为 $f(x)$ 在 X 上 μ 可积, 所以在 X 上存在简单函数列 $\{f_n(x)\}$, 满足

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu$$

同理, 在 Y 上存在简单函数列 $\{g_n(y)\}$, 满足

$$0 \leq g_1(y) \leq g_2(y) \leq \cdots \leq g_n(y) \leq \cdots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y) = g(y)$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y g_n(y) d\gamma = \int_Y g(y) d\gamma$$

因为 $\{f_n(x)g_n(y)\}$ 为 $X \times Y$ 上的简单函数列, 满足

$$0 \leq f_1(x)g_1(y) \leq f_2(x)g_2(y) \leq \cdots \leq f_n(x)g_n(y) \leq \cdots$$

$$\lim_n f_n(x)g_n(y) = f(x)g(y) = h(x, y)$$

由勒维定理及(2), 得

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} h(x, y) d\mu d\gamma &= \lim_n \int_{X \times Y} f_n(x)g_n(y) d\mu d\gamma \\ &= \lim_n \int_X f_n(x) d\mu \int_Y g_n(y) d\gamma \\ &= \int_X f(x) d\mu \int_Y g(y) d\gamma \end{aligned}$$

(4) 当 $f(x)$, $g(y)$ 分别在 X , Y 上 μ , γ 可积时, f_+ , f_- 在 X 上 μ 可积, g_+ , g_- 在 Y 上 γ 可积, 由(3), f_+g_+ , f_-g_- , f_+g_- , f_-g_+ 在 $X \times Y$ 上 $\mu \times \gamma$ 可积, 于是

$$h = h_+ - h_- = (f_+g_+ + f_-g_-) - (f_+g_- + f_-g_+)$$

在 $X \times Y$ 上 $\mu \times \gamma$ 可积, 且

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} h d(\mu \times \gamma) &= \int_{X \times Y} (f_+g_+ + f_-g_-) d(\mu \times \gamma) \\ &\quad - \int_{X \times Y} (f_+g_- + f_-g_+) d(\mu \times \gamma) = \int_X f_+ d\mu \int_Y g_+ d\gamma \\ &\quad + \int_X f_- d\mu \int_Y g_- d\gamma - \int_X f_+ d\mu \int_Y g_- d\mu \\ &\quad - \int_X f_- d\mu \int_Y g_+ d\gamma \\ &= \left(\int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu \right) \left(\int_Y g_+ d\gamma - \int_Y g_- d\gamma \right) \end{aligned}$$

$$= \int_X f d\mu \int_Y g d\gamma$$

50. 设 $(X, R, \mu) = (Y, \varphi, \gamma)$ 为勒贝格测度的单位区间这样的测度空间, E 是 $X \times Y$ 中适合下述条件的集: 对每个 x 与每个 y , E_x 与 $X - E_y$ 都是可列集, 那么, E 是不可测的。

证 假设 E 是可测的, 则有

$$\begin{aligned} (\mu \times \gamma)(E) &= \int_{X \times Y} \chi_E(x, y) d\mu d\gamma \\ &= \int_{X \times Y} \chi_E(x, y) dm dm \end{aligned}$$

由Fubini定理,

$$\begin{aligned} &\int_{X \times Y} \chi_E(x, y) dm dm \\ &= \int_Y mE_x(y) dm = \int_X mE^y(x) dm \end{aligned}$$

但因为 E_x 与 $X - E^y$ 为可列集, 所以

$$mE_x = 0, \quad mE^y = m(X - (X - E^y)) = mX = 1$$

所以

$$\int_Y mE_x(y) dm = 0 \quad \int_X mE^y(x) dm = 1$$

与前述等式矛盾。所以 E 是不可测的。

51. 设在可测空间 (X, R) 上给定两个测度 μ_1, μ_2 , 令 $\mu = a_1\mu_1 + a_2\mu_2$ (a_1, a_2 是任意实数)。试证存在 X 的分解 $X = A \cup B$, $A \cap B = \phi$, 使 A 为 μ 的正集, B 为 μ 的负集 (μ 的正集 A 的定义为: 对每个可测集 E , $E \cap A$ 可测, 且 $\mu(E \cap A)$

≥ 0 , 负集的定义类似)。

证 首先应假设 μ_1, μ_2 中至少有一个为有限测度, 否则当 a_1, a_2 异号时, 将可能出现 $\infty - \infty$ 的情形。在此假设下, $\mu(E)$ 不可能既出现 $+\infty$, 又出现 $-\infty$, 不妨假定

$$-\infty < \mu(E) \leq +\infty$$

易见, 可列个负集的并仍为负集。设

$$\beta = \inf \{ \mu(s) : s \text{ 为可测负集} \}$$

又设 $\{B_i\}$ 为可测负集列, 满足

$$\lim_i \mu(B_i) = \beta \quad B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

则 B 是一可测负集, 且 $\mu(B) = \beta$ 。

再令 $A = X - B$, 可证 A 为正集。事实上, 若 A 不是正集, 则必存在 $E_0 \subset A$, 使 $\mu(E_0) < 0$ 。

E_0 不可能为负集, 否则 $B \cup E_0$ 仍为负集, 且

$$\mu(B \cup E_0) < \mu(B) = \beta$$

与 β 是下确界相矛盾。

因为 E_0 不是负集, 所以必有 $E \subset E_0$, 使 $\mu(E) > 0$, 由于 $-\infty < \mu(E_0) < 0$, 可知任何 $E \subset E_0$, $-\infty < \mu(E) < +\infty$ 。事实上, 因为 $\mu(E_0) = \mu(E_0 - E) + \mu(E)$, $-\infty < \mu(E - E_0) \leq +\infty$, 若 $\mu(E) = +\infty$, 则 $\mu(E_0) = +\infty$, 与 $\mu(E_0) < 0$ 矛盾。

由上可见, 对任何自然数 n , $E \subset E_0$, 且 $\mu(E) > \frac{1}{n}$ 的集 E 最多为有限个, 将 $\mu(E) > \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$)的至多可列个集 E 排列为

$$E_1, E_2, \dots, E_k, \dots$$

$$\text{令 } F_0 = E_0 - \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

则对任何含于 F_0 可测子集 F , 必有 $\mu(F) \leq 0$. 因此 F_0 是一个负集。

又 F_0 与 B 不相交, 且 $\mu(F_0) = \mu(E_0) - \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \mu(E_0) < 0$. 于是 $B \cup F_0$ 为负集, 且 $\mu(B \cup F_0) = \mu(B) + \mu(F_0) < \mu(B) = \beta$, 又与 β 为下确界相矛盾。

因此 $\mu(E_0) < 0$ 的假设不能成立, 所以 A 为一个正集。

52. 研究函数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n}$ 的可微性, 其中记号

$\{y\}$ 表示数 y 与它最近整数间的距离, 例如 $\{3.1\} = 0.1$, $\{3.5\} = 0.5$.

解 显然 $f(x)$ 以 1 为周期, 因此我们只要对 $0 \leq x < 1$ 进行讨论。

若将 $[0, 1)$ 中的 x 写成无穷小数的形式

$$x = 0.a_1a_2 \cdots a_n \cdots$$

则 $10^n x = a_1a_2 \cdots a_n + 0.a_{n+1}a_{n+2} \cdots$

当 $0.a_{n+1}a_{n+2} \cdots \leq \frac{1}{2}$ 时, $\{10^n x\} = 0.a_{n+1}a_{n+2} \cdots$

而当 $0.a_{n+1}a_{n+2} \cdots > \frac{1}{2}$ 时, $\{10^n x\} = 1 - 0.a_{n+1}a_{n+2} \cdots$

可以证明, 对 $[0, 1)$ 中任意的 $x = 0.a_1a_2 \cdots a_n \cdots$, 存在数列 $h_m (m = 1, 2, \cdots)$, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, $h_m \rightarrow 0$, 但

$$\Delta_m f(x) = \frac{f(x + h_m) - f(x)}{h_m}$$

的极限不存在, 于是 $f(x)$ 处处不可微。

事实上, 当 a_m 等于 4 或 9 时, 取 $h_m = -10^{-m}$, 否则取 $h_m = 10^{-m}$, 显然当 $m \rightarrow \infty$ 时, $h_m \rightarrow 0$, 而

$$\begin{aligned}\Delta_m f(x) &= \frac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n(x \pm 10^{-m})\}}{10^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n}}{\pm 10^{-m}} \\ &= 10^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n(x \pm 10^{-m})\} - \{10^n x\}}{10^n}\end{aligned}$$

当 $n \geq m$ 时,

$$\{10^n(x \pm 10^{-m})\} - \{10^n x\} = \{10^n x \pm 10^{n-m}\} - \{10^n x\} = 0$$

当 $n < m$ 时,

$$\{10^n(x \pm 10^{-m})\} = \{10^n x \pm 10^{n-m}\} = \{10^n x\} \pm 10^{n-m}$$

$$10^m \frac{\{10^n(x \pm 10^{-m})\} - \{10^n x\}}{10^n} = 10^m \frac{\pm 10^{n-m}}{10^n} = \pm 1$$

于是, $\Delta_m f(x)$ 是 m 个 ± 1 相加, 它是一个整数, 当 m 为奇数时为奇数, 当 m 为偶数时为偶数。即 $\{\Delta_m f(x)\}$ 是一个奇偶相间的整数列, 这样的数列是不可能有限存在的。

此外, $f(x)$ 处处连续, 事实上, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n}$$

有收敛的优势级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n}$, 故在 $(-\infty, \infty)$ 上一致收敛。

又级数的每一项皆在 $(-\infty, \infty)$ 上连续, 由数学分析的知识知, 其和函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上连续。

53. 设 $\{f_n(x)\}$ 为 $[a, b]$ 上围变函数列, $f_n(x)$ 收敛于一有限函数 $f(x)$, 且若 $\bigvee_a^b(f_n) \leq K (n=1, 2, \dots)$, 则 $f(x)$ 亦围变。

证 在 $[a, b]$ 上任取一组分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$$

则对任何 n , 有

$$\sum_{k=1}^m |f_n(x_k) - f_n(x_{k-1})| \leq \bigvee_a^b(f_n) \leq K$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

所以

$$\sum_{k=1}^m |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m |f_n(x_k) - f_n(x_{k-1})| \leq K$$

故有

$$\bigvee_a^b(f) \leq K$$

即 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上围变。

54. 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为绝对连续, 且几乎处处存在非负导数, 则 $f(x)$ 必为增函数。

证 任取 $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, 由 $f(x)$ 的绝对连续性及 $f'(x) \geq 0$, 得

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(t) dt \geq 0$$

即 $f(x_2) \geq f(x_1)$, 亦即 $f(x)$ 为增函数。

55. 讨论函数 $f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta} (0 \leq x \leq 1; \alpha, \beta > 0)$ 的围变性, 绝对连续性。

解 当 $\alpha \leq \beta$ 时, 在 $[0, 1]$ 上取分点 $x_0 = 0, x_n = 1$,

$$x_i = \left[\frac{1}{(n-1-i)\pi + \frac{\pi}{2}} \right]^{\frac{1}{\beta}}, i = 1, 2, \dots, n-1, \text{则}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ & \geq \sum_{i=2}^{n-1} \left\{ \left[\frac{1}{(n-1-i)\pi + \frac{\pi}{2}} \right]^{\frac{\alpha}{\beta}} + \left[\frac{1}{(n-i)\pi + \frac{\pi}{2}} \right]^{\frac{\alpha}{\beta}} \right\} \\ & \geq \sum_{i=2}^{n-1} \left[\frac{1}{(n-1-i)\pi + \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{(n-i)\pi + \frac{\pi}{2}} \right] \\ & > \sum_{i=2}^{n-1} \left[\frac{1}{(n-i)\pi} + \frac{1}{(n-i+1)\pi} \right] > \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

于是

$$\bigvee_a^b(f) = \sup \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = +\infty$$

所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上非圈变, 非绝对连续。

当 $\alpha > \beta$ 时, 若 $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left| \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x^\beta} - \beta x^{\alpha-\beta-1} \cos \frac{1}{x^\beta} \right| \\ &\leq \alpha x^{\alpha-1} + \beta x^{\alpha-\beta-1} \end{aligned}$$

因为 $\alpha-1 > -1$, $\alpha-\beta-1 > -1$, 所以 $f'(x)$ 在 $[0, 1]$ 上 R 可积, 于是

$$(L) \int_0^1 f'(t) dm = (R) \int_0^1 f'(t) dt$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} (R) \int_{\delta}^x f'(t) dt$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} t^{\alpha} \sin \frac{1}{t^{\beta}} \Big|_{\delta}^x$$

$$= x^{\alpha} \sin \frac{1}{x^{\beta}} - 0 = f(x)$$

故由参考文献[1]第四章定理 6.8 知, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上绝对连续, 固变。

56. 试作一增函数。使其不连续点处处稠密。

解 设 $[0, 1]$ 上的全体有理点为

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

令

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{\{n: a_n < x\}} \frac{1}{2^n} & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

则 $f(x)$ 为增函数, 事实上, 若 $x_2 > x_1$, 则

$$\{n: a_n < x_2\} \supset \{n: a_n < x_1\}$$

因此 $f(x_2) \geq f(x_1)$ 。

另一方面, $[0, 1]$ 上的任何有理点 a_k 都是 $f(x)$ 的不连续点, 即 $f(x)$ 的不连续点在 $[0, 1]$ 上处处稠密, 事实上, 若 $x > a_k$, 则

$$f(x) - f(a_k) \geq \frac{1}{2^k}$$

因此

$$f(a_k + 0) - f(a_k) \geq \frac{1}{2^k}$$

故 $f(x)$ 即为所要作的函数。

57. $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的可积正函数, 设 $0 < q \leq b - a$, $S = \{e: e \subset [a, b], m e \geq q\}$, 试证

$$\inf_{e \in S} \left\{ \int_e f(x) dx \right\} > 0$$

58. 设 $g(x) = \sup_{i \in I} \{f_i(x)\}$, $\psi(x) = \inf_{i \in I} \{f_i(x)\}$

其中 $f_i(x) (i \in I)$ 为可测集 E 上的可积函数, 试问 $g(x)$, $\psi(x)$ 是否在 E 上可积?

答 当 I 为有限集时, $g(x)$, $\psi(x)$ 在 E 上可积; 否则, $g(x)$, $\psi(x)$ 在 E 上不一定可积。

59. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 而在 $[a, b]$ 外等于 0, 设

$$\varphi(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt$$

试证

$$\int_a^b |\varphi(x)| dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

60. 假设 $\{f_n(x)\}$ 为 E 上的非负可积函数列, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = 0$, 则 $f_n(x)$ 测度收敛于 0, 并举例说明在题设下不能得到 $f_n(x)$ 几乎处处收敛于 0.

61. 设 $mE < +\infty$, $f(x) \in L(E)$, $E_n = E(|f| \geq n)$, 试证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot mE_n = 0$$

提示 利用第四章习题 2 的结论及积分的绝对连续性。

62. 设 $mE < \infty$, $f, g, f_n, g_n \in L(E)$, $n = 1, 2, \dots$, 又

$$\int_E |f_n - f| dx \rightarrow 0, \quad \int_E |g_n - g| dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

若 $f_n(x)$ 在 E 上一致有界, 则

$$\int_E |f_n g_n - fg| dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

63. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos x dx = 0$$

64. 设 $f, f_n (n=1, 2, \dots)$ 是 R 上的可积函数, $f_n(x)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$, 且 $\int_R |f_n| dx \rightarrow \int_R |f| dx \quad (n \rightarrow \infty)$,

则

$$(i) \quad \int_E |f_n| dx \rightarrow \int_E |f| dx \quad (n \rightarrow \infty)$$

对一切可测集 E 成立;

$$(ii) \quad \int_R |f_n - f| dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty);$$

$$(iii) \quad \int_R f_n g dx \rightarrow \int_R f g dx \quad (n \rightarrow \infty)$$

对一切有界可测函数 $g(x)$ 成立。

65. 若 $\{f_n(x)\}$ 是可测集 E 上的可积函数列, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n(x)| dx < \infty$$

试证明

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ 在 } E \text{ 上几乎处处收敛于一几乎处处有}$$

限的函数 $f(x)$;

(ii) $f(x)$ 在 E 上可测;

(iii) $f(x)$ 在 E 上可积, 且

$$\int_E f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x) dx$$

66. 设 $mE < \infty$, E 上的非负可积函数列 $\{f_n(x)\}$ 满足

(i) $\{f_n(x)\}$ 依测度收敛于 $F(x)$;

(ii) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $e \subset E$, $me < \delta$ 时, 对一切 $n = 1, 2, \dots$, 有 $\int_e f_n(x) dx < \varepsilon$ 成立, 则有

(1) $F(x)$ 为 E 上几乎处处非负的可测函数;

(2) $F(x)$ 在 E 上可积;

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E F(x) dx$$

67. 设 $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ 定义在 $E = (0, 1) \times (0, 1)$ 上, 证 $f(x, y)$ 在 E 上不可积。

68. (i) 求函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x = 0 \\ 1 - x, & \text{当 } 0 < x < 1 \\ 5, & \text{当 } x = 1 \end{cases} \quad \text{在 } [0, 1] \text{ 上的总变分;}$$

(ii) 求函数

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{当 } x < 1 \\ 10, & \text{当 } x = 1 \\ x^2, & \text{当 } x > 1 \end{cases} \quad \text{在 } [0, 2] \text{ 上的总变分。}$$

69. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为圆变函数的充要条件是: 存在这样一个增函数 $\varphi(x)$, 使对任意的 $x \in [a, b]$, $h > 0$ ($x + h \in [a, b]$) 恒有

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \varphi(x+h) - \varphi(x)$$

70. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[a, b]$ 上的圆变函数, 证明集合 $\{(f(x), g(x)): x \in [a, b]\}$ 不可能充满一个正方形。

71. 圆变连续函数的一致收敛级数之和是否一定是圆变函数?

答 不一定,如考虑定义在 $[0,1]$ 上的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, 其中

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sin n\pi[x(n+1) - 1] & \text{当 } x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } x \in [0,1] - \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \text{ 时} \end{cases}$$

$$n = 1, 2, \dots$$

72. 试证, 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续。反之是否成立?

答 反之不一定成立。

第三章 函数空间 L^p

一、基本概念和主要定理

L^p 空间 设 $p \geq 1$, 若 $|f|^p$ 在可测集 E 上可积, 称 f 是 E 上的 p 幂可积函数。 p 幂可积函数构成的类, 称为 L^p 空间。记为 $L^p(E)$ 或简记为 L^p 。即

$$L^p = \{f; \int_E |f|^p dm < \infty\}$$

对于 $f \in L^p$, 称

$$\|f\|_p = \left\{ \int_E |f|^p dm \right\}^{1/p}$$

为 f 的范数。范数 $\|f\|_p$ 满足范数公理:

- (i) $\|f\|_p \geq 0$, 等号当且仅当 $f \sim 0$ 时成立;
- (ii) $\|af\|_p = |a| \|f\|_p$, a 为数;
- (iii) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, $f, g \in L^p$

称上述不等式 $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ 为明可夫斯基 (Minkowski) 不等式。

对于 $f \in L^p$, $g \in L^p$, 称 $\|f-g\|_p$ 为 f 与 g 之间的距离, 它满足距离公理:

- (i) $\|f-g\|_p \geq 0$, 等式当且仅当 $f \sim g$ 时成立;
- (ii) $\|f-g\|_p = \|g-f\|_p$;
- (iii) $\|f-g\|_p \leq \|f-h\|_p + \|h-g\|_p$, $f, g, h \in L^p$

于是, L^p 是距离空间。

本性有界函数空间 若定义在可测集 E 上的可测函数 f

满足 $\inf_{mE=0} \sup_{x \in E-e} |f(x)| < \infty$, 则称 f 为 E 上的本性有界函数。本性有界函数构成的类称为本性有界函数空间。记为 $L^\infty(E)$ 或简记为 L^∞ 。

对 $f \in L^\infty$, 称

$$|f|_\infty = \inf_{mE=0} \sup_{x \in E-e} |f(x)|$$

为 f 的范数。

相伴数与霍尔得 (Hölder) 不等式 设 $p > 1$, q 满足等式 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则称 p, q 为相伴数。显然 $q > 1$, 约定, $p = 1$ 的相伴数为 $q = \infty$, $p = \infty$ 的相伴数为 $q = 1$ 。

设 $p \geq 1$, q 为相伴数, 则对任何 $f \in L^p, g \in L^q$, 有 $fg \in L$, 且有不等式

$$\left| \int_{\mathbb{R}} fg dm \right| \leq |f|_p |g|_q$$

成立, 称此不等式为霍尔得不等式。

强收敛与弱收敛 设 $f, f_n \in L^p, n = 1, 2, \dots$, 若 f_n 与 f 的距离 $|f_n - f|_p$ 收敛于 0 ($n \rightarrow \infty$), 则称 f_n 强收敛于 f 或称 f_n 依范数收敛于 f 。称 f 是 f_n 的强极限, 简记为

$$f_n \xrightarrow{\text{强}} f$$

设 $f, f_n \in L^p, n = 1, 2, \dots$, 若对每个 $g \in L^q (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n g dm = \int_{\mathbb{R}} f g dm$$

则称 f_n 在 L^p 中弱收敛于 f , 记作 $f_n \xrightarrow{\text{弱}} f$ 。

基本列与完备性 设 f_n 是 L^p 中的元列, 如果当 $n, m \rightarrow \infty$ 时, 有 $|f_m - f_n| \rightarrow 0$, 则称 f_n 是 L^p 中的基本列。如果 L^p 空间的任何基本列 f_n , 都有 $f \in L^p$, 使 $f_n \xrightarrow{\text{强}} f$, 则称 L^p 空间是完备的。

稠密与可分性 设 A 是 L^p 的一个子类, 若对任一个 $f \in L^p$, 恒有元列 $g_n \in A$, 使 $f_n \xrightarrow{\text{强}} f$, 则称 A 在 L^p 中稠密。如果存在可列子类 A , 使 A 在 L^p 中稠密, 则称 L^p 具有可分性。

傅立叶 (Fourier) 变式 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上的可积函数, 称含参量积分

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx$$

为可积函数 f 的傅立叶变式。

设 $f \in L^2_{-\infty, \infty}$, 则 $\frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N f(x) e^{-itx} dx$ 按 L^2 意义强

收敛于一个函数 $\hat{f}(t)$, 称之为 f 依 L^2 意义的傅立叶变式, 并记为

$$\hat{f}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N f(x) e^{-itx} dx$$

两个函数的卷积 两个函数 $f(x)$, $g(x)$ 的卷积指

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt$$

$L^2(E)$ 中的标准直交系 设 $mE < \infty$, $\omega_n \in L^2(E)$ 且

$$\int_E \omega_i \omega_j dm = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

则称 $\{\omega_n\}$ 为 $L^2(E)$ 中的标准直交系。

定理1 L^p 是一线性空间。

定理2 设 $f, f_n \in L^p$, $n = 1, 2, \dots$, 若 $f_n \xrightarrow{\text{强}} f$, 则 $f_n \xrightarrow{\text{弱}} f$ 。

定理3 L^p 空间是完备的。

定理4 设 E 是有界可测集, 则 $L^p(E)$ 是可分的。

定理5 (黎曼—勒贝格定理) 设 $f \in L_{-\infty, \infty}$, 则当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时, $\hat{f}(t) \rightarrow 0$ 。

定理6 设 $x^r f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上可积, 则 $\hat{f}(t)$ 为 r 阶可微, 且有等式

$$\hat{f}^{(r)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-ix)^r e^{-itx} dx$$

定理7 设 $f(x) \in L^2_{-\infty, \infty}$, $\hat{f}(t)$ 是它的依 L^2 意义的傅立叶变式, 则 $\hat{f} \in L^2_{-\infty, \infty}$, 且有巴塞弗(Parseval)公式成立:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(t)|^2 dt$$

定理8 设 $f \in L$, $g \in L$, 则有

$$(f * g)(t) = 2\pi \hat{f}(t) \hat{g}(t)$$

当 $f \in L^2$, $g \in L^2$ 时, 有

$$(f * g)(t) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u) \hat{g}(u) e^{itu} du$$

二、例题、习题与解法

1. 问在 L^2 中弱收敛于 f 的元列是否测度收敛?

解 不一定测度收敛。例如: $\{\sin nx\}$ 为 $L^2[0, \pi]$ 中的元列, 对任意的 $f \in L^2[0, \pi] \subset L[0, \pi]$, 由黎曼—勒贝格引理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, \pi]} f(x) \sin nx \, dm = 0$$

即 $\{\sin nx\}$ 弱收敛于 $F(x) = 0$ 。但对任意 $n = 1, 2, \dots$

$$mE(|\sin nx - 0| \geq \frac{1}{2}) \geq \frac{\pi}{3}$$

所以 $\{\sin nx\}$ 并非测度收敛于 $F(x)$ 。

2. 设在 L^2 中 $f_n \xrightarrow{\text{强}} f$, 又 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} g$, 则 $f \sim g$ 。

证 任给 $\varepsilon > 0$, 令

$$E_n(\varepsilon) = E(|f_n - f| \geq \varepsilon)$$

则

$$\int_B |f_n - f|^2 dm \geq \int_{E_n(\varepsilon)} |f_n - f|^2 dm \geq \varepsilon^2 mE_n(\varepsilon)$$

由 $\int_B |f_n - f|^2 dm \rightarrow 0$ 即得

$$mE_n(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

也即 f_n 测度收敛于 f 。再由黎斯定理, 存在子列 $\{f_{n_k}\}$, 几乎处处收敛于 f 。而 $\{f_{n_k}\}$ 几乎处处收敛于 g , 所以 $f \sim g$ 。

3. 设 $f, f_n \in L^p (p \geq 1)$, $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 又设

$$\int_B |f_n|^p dm \rightarrow \int_B |f|^p dm$$

则对任何可测子集 $e \subset E$, 有

$$\int_e |f_n|^p dm \rightarrow \int_e |f|^p dm$$

证 因为 $f_n \xrightarrow{a.e} f$, 所以 $|f_n|^p \xrightarrow{a.e} |f|^p$, 由第二章习题 4, 即得所要的结论。

4. 设 $f_n(x)$ 是 L^2 中的序列, 若 f_n 测度收敛于 f , $|f_n| \leq K$, K 为常数, 则 $f_n \xrightarrow{\text{弱}} f$ 。

证 因为 $f_n(x)$ 测度收敛于 $f(x)$, 所以存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$, 于是 $\{f_{n_k}^2(x)\}$ 几乎处处收敛于 $f^2(x)$, 由法杜定理, 得

$$\int_{\mathbb{R}} f^2 dm \leq \liminf_k \int_{\mathbb{R}} f_{n_k}^2 dm \leq K^2$$

即 $f \in L^2$, 且 $|f| \leq K$ 。

以下不妨设 $E = (-\infty, +\infty)$, 否则在 $\mathcal{C}E$ 上, 令 $f_n(x) = 0$, $f(x) = 0$ 。

(1) 先证对 L^2 中的任意有界可测函数 $g_1(x)$ 有

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x) g_1(x) dm = \int_{\mathbb{R}} f(x) g_1(x) dm$$

由于 $g_1(x) \in L^2$, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $M > 0$, 使

$$\int_{|x| > M} |g_1|^2 dm < \left(\frac{\varepsilon}{4K} \right)^2$$

于是由许瓦兹不等式, 得

$$\begin{aligned} \int_{|x| > M} |f_n - f| |g_1| dm &\leq \left\{ \int_{|x| > M} |f_n - f|^2 dm \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left\{ \int_{|x| > M} |g_1|^2 dm \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon/2 \end{aligned}$$

设 $|g_1(x)| \leq S$, $E_1 = [-M, M]$, 则对任意的 $\sigma > 0$,

$$\begin{aligned}
 & \int_{E_1} |f_n - f| |g_1| dm \\
 &= \int_{E_1(|f_n - f| \geq \sigma)} |f_n - f| \cdot |g_1| dm \\
 &+ \int_{E_1(|f_n - f| < \sigma)} |f_n - f| |g_1| dm \\
 &\leq S \int_{E_1(|f_n - f| \geq \sigma)} |f_n - f| dm + S\sigma mE_1 \\
 &\leq S \left\{ \int_{E_1(|f_n - f| \geq \sigma)} |f_n - f| dm \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{E_1(|f_n - f| \geq \sigma)} dm \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + S\sigma mE_1 \\
 &\leq 2KS \left\{ mE_1(|f_n - f| \geq \sigma) \right\}^{\frac{1}{2}} + 2MS\sigma
 \end{aligned}$$

取 $\sigma < \frac{\varepsilon}{8MS}$, 固定 σ , 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} mE_1(|f_n - f| \geq \sigma) = 0$$

所以存在 N , 使当 $n > N$ 时,

$$mE_1(|f_n - f| \geq \sigma) < \left(\frac{\varepsilon}{8KS} \right)^2$$

于是当 $n > N$ 时,

$$\int_{E_1} |f_n - f| \cdot |g_1| dm < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f_n g_1 dm - \int_{\mathbb{R}} f g_1 dm \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| \cdot |g_1| dm$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{|x|>M} |f_n - f| \cdot |g_1| dm + \int_{E_1} |f_n - f| \cdot |g_1| dm \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

即

$$\lim_n \int_E f_n g_1 dm = \int_E f g_1 dm$$

(2) 证 $f_n \xrightarrow{\text{弱}} f$.

任取一个 $g(x) \in L^2$, 由参考文献 [1] 第五章引理 2.1, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 在 L^2 中存在有界可测函数 $g_1(x)$, 使

$$\|g - g_1\| < \frac{\varepsilon}{3K}$$

由已证的 (1), 存在 N , 使当 $n > N$ 时,

$$\left| \int_E (f_n - f) g_1 dm \right| < \varepsilon/3$$

于是

$$\begin{aligned}
\left| \int_E (f_n - f) g dm \right| &\leq \left| \int_E f_n (g - g_1) dm \right| \\
&\quad + \left| \int_E (f_n - f) g_1 dm \right| \\
&\quad + \left| \int_E f (g_1 - g) dm \right| \\
&\leq \|g - g_1\| \cdot \|f_n\| + \varepsilon/3 \\
&\quad + \|f\| \cdot \|g - g_1\|
\end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3K} K + \varepsilon/3 + K \frac{\varepsilon}{3K} = \varepsilon$$

即

$$\lim_n \int_E f_n g dm = \int_E f g dm$$

由 $g \in L^2$ 的任意性, 证得了 $f_n \xrightarrow{\text{弱}} f$.

5. 设 $F(x)$ 是 L^p ($p > 1$) 中某个元的不定积分, 则渐近式

$$F(x+h) - F(x) = o(h^{1-\frac{1}{p}}) \quad (h \rightarrow 0)$$

成立。

证 设 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, $f(t) \in L^p$, 则

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x)| &\leq \int_x^{x+h} |f(t)| dt \\ &\leq \left\{ \int_x^{x+h} |f(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \times \left\{ \int_x^{x+h} dt \right\}^{1-\frac{1}{p}} \\ &\leq \|f\|_p \cdot h^{1-\frac{1}{p}} = o(h^{1-\frac{1}{p}}) \\ &\quad (h \rightarrow 0) \end{aligned}$$

6. 设 $f, f_n \in L^p$ ($p \geq 1$), $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 则在 L^p 中, $f_n \xrightarrow{\text{弱}} f$ 的充要条件是 $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$.

证 必要性: 由 $|\|f_n\|_p - \|f\|_p| \leq \|f_n - f\|_p$, 即可得。

充分性: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 因为 $f \in L^p$, 即 $|f|^p \in L$, 所以存在 K , 使

$$\left\{ \int_{|x| > K} |f(x)|^p dm \right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}}$$

设 $E_0 = (-\infty, -K) \cup (K, \infty)$ 因为 $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$, 且 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 由本章第3题知

$$\left\{ \int_{E_0} |f_n|^p dm \right\}^{\frac{1}{p}} \rightarrow \left\{ \int_{E_0} |f|^p dm \right\}^{\frac{1}{p}}$$

于是存在 N_1 , 当 $n > N_1$ 时, 有

$$\left\{ \int_{E_0} |f_n|^p dm \right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}}$$

因此

$$\begin{aligned} \int_{E_0} |f_n - f|^p dm &\leq \left\{ \left[\int_{E_0} |f_n|^p dm \right]^{\frac{1}{p}} \right. \\ &\quad \left. + \left[\int_{E_0} |f|^p dm \right]^{\frac{1}{p}} \right\}^p < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

因为 $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$, 所以存在 $N_2 \geq N_1$, 当 $n > N_2$ 时

$$\|f_n\|_p < \|f\|_p + 1$$

又 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 故在 $E_1 = [-K, K]$ 上 f_n 测度收敛于 f , 因此, 对正数 $\sigma < \frac{\varepsilon}{8K}$, 存在 $N > N_2$, 使当 $n > N$ 时,

$$mE_1(|f_n - f|^p \geq \sigma) < \frac{\varepsilon}{4(2\|f\|_p + 1)}$$

于是

$$\int_{E_1} |f_n - f|^p dm = \int_{E_1(|f_n - f|^p < \sigma)} |f_n - f|^p dm$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{E_1(|f_n - f| \geq \sigma)} |f_n - f|^p dm \\
& < \sigma \cdot mE_1 + (2\|f\|_p^p + 1)mE_1(|f_n - f| \geq \sigma) \\
& < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

故当 $n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\int_E |f_n - f|^p dm &= \int_{E_0} |f_n - f|^p dm + \int_{E_1} |f_n - f|^p dm \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon
\end{aligned}$$

即 $\|f_n - f\|_p^p \xrightarrow{\text{强}} 0$, 亦即 $f_n \xrightarrow{\text{强}} f$.

7. 设 $f \in L^p(E)$, e 为 E 的可测子集, 则

$$\left\{ \int_E |f|^p dm \right\}^{1/p} \leq \left\{ \int_e |f|^p dm \right\}^{1/p} + \left\{ \int_{E-e} |f|^p dm \right\}^{1/p}$$

证 令

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \begin{cases} f(x) & x \in e \\ 0 & x \in E - e \end{cases} \\
f_2(x) &= \begin{cases} 0 & x \in e \\ f(x) & x \in E - e \end{cases}
\end{aligned}$$

则由明可夫斯基不等式, 得

$$\begin{aligned}
\left\{ \int_E |f|^p dm \right\}^{1/p} &= \left\{ \int_E |f_1 + f_2|^p dm \right\}^{1/p} \\
&\leq \left\{ \int_E |f_1|^p dm \right\}^{1/p} + \left\{ \int_E |f_2|^p dm \right\}^{1/p} \\
&= \left\{ \int_e |f|^p dm \right\}^{1/p} + \left\{ \int_{E-e} |f|^p dm \right\}^{1/p}
\end{aligned}$$

8. 设 p, q, r 为满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ 的三个正数, 则
 对任何可测函数 f, g, h , 有

$$\int_E |fgh| dm \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \cdot \|h\|_r$$

证 若 $\|f\|_p, \|g\|_q, \|h\|_r$ 中至少有一个为 ∞ , 则不等式显然成立。

若 $f \in L^p, g \in L^q, h \in L^r$, 则

$$g^{\frac{p}{p-1}} \in L^{\frac{p-1}{p}q} \quad h^{\frac{p}{p-1}} \in L^{\frac{p-1}{p}r}$$

因为

$$\frac{1}{\frac{p-1}{p}q} + \frac{1}{\frac{p-1}{p}r} = 1$$

由霍尔得不等式, 得

$$g^{\frac{p}{p-1}} h^{\frac{p}{p-1}} \in L^1, \text{ 即 } gh \in L^{\frac{p}{p-1}}$$

且有

$$\int_E |gh|^{\frac{p}{p-1}} dm \leq \|g^{\frac{p}{p-1}}\|_{\frac{p-1}{p}q} \|h^{\frac{p}{p-1}}\|_{\frac{p-1}{p}r}$$

$$= \left\{ \int_E |g|^q dm \right\}^{\frac{p}{(p-1)q}} \left\{ \int_E |h|^r dm \right\}^{\frac{p}{(p-1)r}}$$

又因为 $gh \in L^{\frac{p}{p-1}}, f \in L^p$, 及 $\frac{1}{p} + \frac{1}{\frac{p}{p-1}} = 1$, 再由霍尔

得不等式, 得 $fgh \in L^1$, 且

$$\begin{aligned}\int_E |fgh| dm &\leq \|f\|_p \|gh\|^{\frac{p}{p-1}} \\ &\leq \|f\|_p \left\{ \int_E |g|^q dm \right\}^{1/q} \left\{ \int_E |h|^r dm \right\}^{1/r} \\ &= \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r\end{aligned}$$

9. 设 $f \in L^p(-\infty, \infty)$, $g \in L^q(-\infty, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$p \geq 1$, 试证 $F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)g(x)dx$ 为 t 的连续函数。

证 (i) 先证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dm \right\}^{1/p} = 0$$

事实上, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使当 $|h| < 1$ 时, 有

$$\left\{ \int_{-\infty}^{-N} |f(x+h) - f(x)|^p dm \right\}^{1/p} < \varepsilon/3$$

$$\left\{ \int_N^{\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dm \right\}^{1/p} < \varepsilon/3$$

由本章第10题, 存在 $0 < h_0 < 1$, 使当 $|h| < h_0$ 时, 有

$$\left\{ \int_{-N}^N |f(x+h) - f(x)|^p dm \right\}^{1/p} < \varepsilon/3$$

从而

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dm \right\}^{1/p} < \varepsilon$$

即有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dm \right\}^{1/p} = 0$$

(ii) 再证 $F(t)$ 的连续性。

对任意的 $t \in (-\infty, \infty)$, 由霍尔得不等式, 有

$$|F(t+\Delta t) - F(t)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t+\Delta t) - f(x+t)| |g(x)| dx \\
&\leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t+\Delta t) - f(x+t)|^p dx \right\}^{1/p} \|g\|_q \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+\Delta t) - f(x)|^p dx \right\}^{1/p} \|g\|_q
\end{aligned}$$

根据(i), 得

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |F(t+\Delta t) - F(t)| = 0$$

即 $F(t)$ 为 t 的连续函数。

10. 设 $f \in L^p[a, b]$, $p > 0$, 试证

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x+h) - f(x)|^p dm \right\}^{1/p} = 0$$

$$(0 < 2\delta \leq b-a)$$

证 (i) 先证明, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 上的连续函数 $\varphi(x)$, 使

$$\left\{ \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^p dm \right\}^{1/p} < \varepsilon$$

事实上, 令

$$E = [a, b], \quad E_n = E(|f| > n)$$

由积分的绝对连续性, 存在 $\delta_1 > 0$, 使当 $e \subset E$, $me < \delta_1$ 时,

$$\left\{ \int_e |f|^p dm \right\}^{1/p} < \frac{\varepsilon}{4}$$

又因为 $\lim_n mE_n = 0$, (见第二章习题33), 所以存在 N ,

$$\text{使 } mE_N < \delta_1$$

于是, 有

$$N \cdot mE_N < \left\{ \int_{E_N} |f|^p dm \right\}^{1/p} < \varepsilon/4$$

又由鲁津定理, 存在闭集 $F \subset E - E_N$, 使

$$\left[m(E - E_N - F) \right]^{1/p} < \frac{\varepsilon}{4N}$$

而 $f(x)$ 在 F 上是连续的, 在 $[a, b]$ 上作连续函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & x \in F \\ \text{函数保持线性} & x \in E - F \end{cases}$$

则 $\varphi(x)$ 即为所求。事实上, $|\varphi(x)| \leq N$, 而

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^p dm \right\}^{1/p} \\ &= \left\{ \int_F |f - \varphi|^p dm \right\}^{1/p} + \left\{ \int_{E_N} |f - \varphi|^p dm \right\}^{1/p} \\ &+ \left\{ \int_{E=E_N-F} |f - \varphi|^p dm \right\}^{1/p} \leq \left\{ \int_{E_N} |f|^p dm \right\}^{1/p} \\ &+ \left\{ \int_{E_N} |\varphi|^p dm \right\}^{1/p} + 2N \cdot \left\{ m(E - E_N - F) \right\}^{1/p} \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

(ii) 证本题的结论。

由已证明的(i), 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 上的连续函数 $\varphi(x)$, 使

$$\left\{ \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^p dm \right\}^{1/p} < \varepsilon/3$$

由于 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续, 存在 $0 < \delta_2 < \delta_1$, 使对任何 $x', x'' \in [a, b]$, 当 $|x' - x''| < \delta_2$ 时, 有

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| < \frac{1}{b-a} \left(\frac{\varepsilon}{3} \right)^p$$

因此, 当 $|h| < |\delta_2|$ 时,

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x+h) - f(x)|^p dm \right\}^{1/p} \\
& \leq \left\{ \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x+h) - \varphi(x+h)|^p dm \right\}^{1/p} \\
& \quad + \left\{ \int_{a+\delta}^{b-\delta} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p dm \right\}^{1/p} \\
& \quad + \left\{ \int_{a+\delta}^{b-\delta} |\varphi(x) - f(x)|^p dm \right\}^{1/p} \\
& < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

即

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x+h) - f(x)|^p dm \right\}^{1/p} = 0$$

11. 试证, 当 $1 \leq r < p$ 时, $L^p \subset L^r$, 假定基本集 E 的测度为有限. 若 $mE = \infty$, 结论如何?

证 设 $f \in L^p$, 令

$$A = E(|f| \geq 1), \quad B = E - A$$

则有

$$\begin{aligned}
\int_E |f|^r dm &= \int_A |f|^r dm + \int_B |f|^r dm \\
&\leq \int_A |f|^p dm + mB < \infty
\end{aligned}$$

即 $f \in L^r$, 于是证得 $L^p \subset L^r$.

当 $mE = +\infty$ 时, 结论不成立. 例如, 设 $E = [1, +\infty)$, $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, 则 $f \in L^4$, 但 $f \notin L^2$.

12. 设 $p > 1$, $f_n \in L^p$, 若在 L^p 中, $f_n \xrightarrow{\text{强}} f$, $f \in L^p$, 当 $1 \leq r \leq p$ 时, 在 L^r 中, $f_n \xrightarrow{\text{强}} f$, 假定基本集 E 的测度为有

限。

证 令 $A_n = E(|f_n - f| \geq 1)$, $B_n = E(|f_n - f| < 1)$, 则

$$\int_B |f_n - f|^r dm = \int_{A_n} |f_n - f|^r dm + \int_{B_n} |f_n - f|^r dm$$

$$\leq \int_{A_n} |f_n - f|^p dm + \int_{B_n} |f_n - f| dm$$

$$\leq \int_B |f_n - f|^p dm + \|f_n - f\|_p (mE)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$$

$$= \|f_n - f\|_p^p + \|f_n - f\|_p (mE)^{\frac{1}{q}}$$

由 $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$, 得 $\|f_n - f\|_r \rightarrow 0$.

13. 试证 $L^2(1, 0)$ 中标准直交系的基数不超过 \aleph_0 .

证 因为 L^2 为可分空间, 所以存在 L^2 中的稠密子类

$$A = \{g_1, g_2, \dots\}$$

设 $\{\omega_i\}$ 为标准直交系, 任一 ω_k 必在 A 中存在 g_k , 使得

$$\|\omega_k - g_k\|_2 < \frac{1}{2} \quad k = 1, 2, \dots$$

且当 $j \neq k$ 时,

$$\begin{aligned} \|\omega_k - \omega_j\|_2 &= \left\{ \int_0^1 (\omega_k - \omega_j)^2 dm \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \int_0^1 \omega_k^2 dm + \int_0^1 \omega_j^2 dm \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \|g_k - g_j\|_2 &= \|g_k - \omega_k + \omega_k - \omega_j + \omega_j - g_j\|_2 \\ &\geq \|\omega_k - \omega_j\|_2 - \|g_k - \omega_k\|_2 - \|g_j - \omega_j\|_2 > \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

即不同的 ω_i 对应于 A 中不同的 g_i , 因此 ω_i 至多有可列个。

14. 设积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 对于任何 $g \in L^2$ 都存在且为有限, 则 $f \in L^2$.

证法一 第一步证明: 若在 L^2 中 $f_n \xrightarrow{\text{弱}} f$, 则 $\{\|f_n\|_2\}$ 有界。

1° 先证, 若有一个 $\varphi_0(x) \in L^2$, 存在 $M > 0$ 及 $r > 0$, 使对所有的 n 及满足 $\|\varphi(x) - \varphi_0(x)\| \leq r^2$ 的任一 $\varphi(x)$, 总有

$$\left| \int_a^b f_n(x)\varphi(x)dx \right| \leq M$$

则 $\{\|f_n\|_2\}$ 有界。

事实上, 由于 $h_n(x) = \frac{r}{\|f_n\|_2} f_n(x) + \varphi_0(x) (n = 1, 2, \dots)$ 满足

$$\|h_n(x) - \varphi_0(x)\|_2 \leq r$$

所以有

$$\begin{aligned} \|f_n\|_2 &= \frac{1}{\|f_n\|_2} \left| \int_a^b f_n^2(x)dx \right| \\ &= \left| \int_a^b \frac{f_n^2(x)}{\|f_n\|_2} dx + \frac{1}{r} \int_a^b f_n(x)\varphi_0(x)dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r} \int_a^b f_n(x)\varphi_0(x)dx \right| \\ &\leq \frac{1}{r} \left| \int_a^b f_n(x) \left[\frac{r}{\|f_n\|_2} f_n(x) + \varphi_0(x) \right] dx \right| \\ &\quad + \frac{1}{r} \left| \int_a^b f_n(x)\varphi_0(x)dx \right| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{r}M + \frac{1}{r}M$$

此即说明 $\{\|f_n\|_2\}$ 有界。

2° 证 $\{\|f_n\|_2\}$ 有界

反设 $\{\|f_n\|_2\}$ 无界, 则由1°知, 对 $\varphi_0(x) \equiv 0$, $r=1$ 及 $M=1$, 存在 $\varphi_1(x)$ 及 n_1 满足

$$\|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)\|_2 \leq 1, \quad \left| \int_a^b f_{n_1}(x) \varphi_1(x) dx \right| > 1$$

容易看出, 当 φ 与 φ_1 充分接近时, $\left| \int_a^b f_{n_1} \varphi dx \right| > 1$ 也成立。事实上, 设 $\|\varphi - \varphi_1\|_2 = \varepsilon$, 则

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f_{n_1} \varphi dx \right| \\ & \geq \left| \int_a^b f_{n_1} \varphi dx \right| - \left| \int_a^b f_{n_1} (\varphi - \varphi_1) dx \right| \\ & \geq \left| \int_a^b f_{n_1} \varphi_1 dx \right| \\ & \quad - \left\{ \int_a^b f_{n_1}^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^b |\varphi - \varphi_1|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\ & = \left| \int_a^b f_{n_1} \varphi_1 dx \right| - \varepsilon \|f_{n_1}\|_2 \end{aligned}$$

因此, 当 ε 充分小时,

$$\left| \int_a^b f_{n_1} \varphi dx \right| > 1$$

再由1°知, 对 $\varphi_1(x)$, $r_1 = \min(\frac{1}{2}, \varepsilon)$, $M=2$, 存在 $\varphi_2(x)$ 及 $n_2 > n_1$, 满足

$$\|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\|_2 \leq r_1 \quad \left| \int_a^b f_{n_2}(x) \varphi_2(x) dx \right| > 2$$

连续利用1°, 得到一数列

$$n_1 < n_2 < n_3 \dots$$

与 L^2 中的函数列

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots$$

及一个以0为极限的数列

$$r_1, r_2, \dots$$

使得

$$\left| \int_a^b f_{n_k} \varphi_k dx \right| > k, \quad \|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\|_2 \leq r_k$$

且当 $\|\varphi - \varphi_k\|_2 \leq r_k$ 时, 也有

$$\left| \int_a^b f_{n_k} \varphi dx \right| > k$$

由 L^2 空间的完备性, 存在 $\varphi(x) \in L^2$, 使

$$\|\tilde{\varphi} - \varphi_k\|_2 \leq r_k$$

于是

$$\left| \int_a^b f_{n_k} \tilde{\varphi} dx \right| > k \quad k=1, 2, 3, \dots$$

但从

$$\int_a^b f_n(x) \tilde{\varphi}(x) dx \longrightarrow \int_a^b f(x) \tilde{\varphi}(x) dx$$

知 $\left\{ \int_a^b f_{n_k} \tilde{\varphi} dx \right\}$ 是有界的, 这矛盾说明 $\{\|f_n\|_2\}$ 必有界。

第二步证明 $f \in L^2$.

在题设中, 令 $g(x) = 1$, 则得 $f \in L$, 于是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上几乎处处有限可测, 令

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E(|f| \leq n) \\ n & x \in E(|f| > n) \end{cases} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

则对任意的 $g(x) \in L^2$, 有

$$|f_n(x)g(x)| \leq |f(x)g(x)|$$

而 $\int_a^b |f(x)g(x)|dx < \infty$, 且 $f_n(x)g(x) \xrightarrow{a.e.} f(x)g(x)$.

由勒贝格控制收敛定理, 得

$$\int_a^b f_n(x)g(x)dx \longrightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx$$

即 $f_n(x) \xrightarrow{\text{弱}} f(x)$ 。由第一步, $\{\|f_n\|_2\}$ 有界, 设

$$\int_a^b |f_n(x)|^2 dx \leq K \quad n=1,2,3,\dots$$

则由法杜定理, 得

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \liminf_n \int_a^b |f_n(x)|^2 dx \leq K$$

证法二 反设 $f(x) \notin L^2$, 即 $\int_a^b |f(x)|^2 dx = +\infty$,
令

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{当 } |f(x)| \leq n \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } |f(x)| > n \text{ 时} \end{cases}$$

则 $f_n \in L^2$.

在题设中, 令 $g(x) = 1$ 得 $f \in L$, 从而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上几乎处处有限, 于是 $|f_n(x)|^2$ 几乎处处收敛于 $|f(x)|^2$.

又因 $\{|f_n(x)|^2\}$ 为非负单调增序列, 由勒维定理, 得

$$\lim_n \int_a^b |f_n(x)|^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx = +\infty$$

记 $C_n = \int_a^b |f_n(x)|^2 dx$, 则 $C_n \longrightarrow +\infty$, 故不妨设 $C_n > 0$.

又令 $g_n(x) = \frac{|f_n(x)|}{C_n}$, 则 $g_n(x) \geq 0$, 且 $g_n(x) \in L^2$.

因为

$$\int_a^b |f(x)|g_n(x)dx = \frac{1}{C_n} \int_a^b |f(x)| |f_n(x)|dx$$

$$= \frac{1}{C_n} \int_a^b |f_n(x)|^2 dx = 1$$

$$\|g_n\|^2 = \int_a^b |g_n(x)|^2 dx$$

$$= \frac{1}{C_n^2} \int_a^b |f_n(x)|^2 dx = \frac{1}{C_n} \rightarrow 0$$

所以必存在单调上升的子列 $\{n_k\}$, 满足

$$\|g_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k} \quad \int_a^b |f(x)| g_{n_k}(x) dx = 1$$

$$\text{令 } h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_{n_k}(x) \quad h_m(x) = \sum_{k=1}^m g_{n_k}(x)$$

由于

$$\|h_{m+p} - h_m\| \leq \sum_{i=m+1}^{m+p} \|h_i\| < \frac{1}{2^m}$$

所以 $\{h_m(x)\}$ 是 L^2 中的基本列。

由 L^2 空间的完备性及本章习题2, $h_m(x)$ 在 L^2 中平均收敛于 $h(x)$, 于是存在 m_0 , 使 $\|h - h_{m_0}\| < 1$, 从而

$$\|h\| \leq \|h_m\| + 1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|g_{n_k}\| + 1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} + 1 < +\infty$$

即

$$h(x) \in L^2$$

但另一方面, 对任何自然数 m ,

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)h(x)| dx &= \int_a^b |f(x)| h(x) dx \\ &\geq \int_a^b |f(x)| h_m(x) dx \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^m \int_a^b |f(x)| g_k(x) dx = m \cdot 1 = m$$

由 m 的任意性得

$$\int_a^b |f(x)h(x)| dx = +\infty$$

即在 L^2 中找到函数 $h(x)$, 使

$$\int_a^b |f(x)h(x)| dx = +\infty$$

与题设矛盾。故有 $f(x) \in L^2$ 。

15. 设三角级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ 在任一

正测度集 E 上收敛, 试证 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$ 。

证 因为 $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ 在任一正测

度集 E 上收敛, 所以

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = 0$$

在 E 上成立。令

$$r_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

则有 θ_k , 满足

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = r_k \cos(kx + \theta_k)$$

若 a_k, b_k 中有一个不收敛于零, 即 $r_k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ 不成立, 则存在子列 $\{k_i\}$ 及正数 σ , 满足

$$k_1 < k_2 < \dots, r_{k_i} > \sigma$$

且当 $x \in E$ 时,

$$\cos(k_i x + \theta_{k_i}) \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty)$$

因为 $|\cos^2(k_i x + \theta_{k_i})| \leq 1$, 由有界收敛定理, 得

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \int_E \cos^2(k_i x + \theta_{k_i}) dm \\ = \int_E \lim_{i \rightarrow \infty} \cos^2(k_i x + \theta_{k_i}) dm = 0 \end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned} \int_E \cos^2(kx + \theta_k) dm \\ = \frac{1}{2} \int_E [1 + \cos(2kx + 2\theta_k)] dm \\ = \frac{1}{2} mE + \cos 2\theta_k \int_E \cos 2kx dm \\ - \sin 2\theta_k \int_E \sin 2kx dm \end{aligned}$$

注意到 $\int_E \cos kx dm$, $\int_E \sin kx dm$ 是 E 的特征函数的傅立叶系数, 由黎曼—勒贝格引理知

$$\int_E \cos 2kx dm \rightarrow 0, \quad \int_E \sin 2kx dm \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

从而得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \cos^2(kx + \theta_k) dm = \frac{1}{2} mE > 0$$

得出矛盾。由此可见, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $a_k \rightarrow 0$, $b_k \rightarrow 0$.

16. 设 $f, f_n \in L(-\infty, \infty)$, 且 $f_n \xrightarrow{\text{强}} f$ (在 $L(-\infty, \infty)$ 中), 则在 $(-\infty, \infty)$ 上一致地有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^\wedge(x) = f^\wedge(x)$, 问在

$L^2(-\infty, \infty)$ 中相应的命题是否成立。

证 因为 $|f_n^\wedge(x) - f^\wedge(x)|$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} [f_n(t) - f(t)] e^{-i\omega t} dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t) - f(t)| dt$$

由 $f_n \xrightarrow{\text{强}} f$ 知, $f_n^{\wedge}(x)$ 一致趋于 $f^{\wedge}(x)$.

在 $L^2(-\infty, \infty)$ 中, 相应的命题不成立。例如, 令

$$f_n(x) = \frac{\sin \frac{x}{n}}{x}, \quad f(x) = 0$$

则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{x}{n}}{x^2} dx$$

$$= \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \frac{\pi}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

即 $f_n \xrightarrow{\text{强}} f$. 另一方面, 对任何 n ,

$$f_n^{\wedge}(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{\sin \frac{x}{n}}{x} e^{-itx} dx$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega}{n}}^{\frac{\omega}{n}} \frac{\sin u}{u} e^{-inut} du$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega}{n}}^{\frac{\omega}{n}} \frac{\sin u \cos nut}{u} du$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\omega}{n}}^{\frac{\omega}{n}} \frac{\sin(1+nt)u + \sin(1-nt)u}{u} du$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} & |nt| < 1 \\ 0 & |nt| > 1 \\ \frac{1}{4} & |nt| = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} & |t| < \frac{1}{n} \\ 0 & |t| > \frac{1}{n} \\ \frac{1}{4} & |t| = \frac{1}{n} \end{cases}$$

而

$$f^\wedge(t) = 0$$

可见 $f_n^\wedge(t) \xrightarrow{\text{a.e.}} f^\wedge(t)$, 但 $f_n^\wedge(t)$ 并非一致收敛于 $f^\wedge(t)$.

17 设 $f \in L_2\pi$, 而 g 有界且有周期 2π , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(nx)dm = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dm \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dm$$

证 设 $|g(x)| \leq M$, $\left| \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dm \right| = K$.

(i) 设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上 R 可积, 于是

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(nx)dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\pi + \frac{2k\pi}{n}}^{-\pi + \frac{2(k+1)\pi}{n}} f(x)g(nx)dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} f\left(t - \pi + \frac{2k+1}{n}\pi\right)g(nt - n\pi + (2k+1)\pi)dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\pi - n\pi}^{\pi - n\pi} \frac{1}{n} f\left(\frac{u}{n} + \frac{2k+1}{n}\pi\right)g(u + \pi)du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{u}{n} + \frac{2k+1}{n}\pi\right)g(u + \pi)du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right)g(u + \pi)du$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{u}{n} + \frac{2k+1}{n}\pi\right) - f\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right) \right] g(u + \pi)du$$

$$= I_1 + I_2$$

因为 $|f(x)g(nx)| \leq M|f(x)|$

而 $|f(x)|$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积, 由勒贝格控制收敛定理, 得

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right) g(u+\pi) du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(t) dt \right) g(u+\pi) du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx
\end{aligned}$$

由 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的一致连续性, 任给 $\varepsilon > 0$, 当 n 充分大时, 有

$$\left| f\left(\frac{u}{n} + \frac{2k+1}{n}\pi\right) - f\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right) \right| < \varepsilon$$

对 $[-\pi, \pi]$ 上的任何 u 及任何 $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 都成立, 从而当 n 充分大时,

$$|I_2| \leq M \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon du = 2M\pi\varepsilon$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_2 = 0$$

故有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(nx) dm \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dm \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dm
\end{aligned}$$

(ii) 设 $f \in L_2 \pi$, 则对任何 $\varepsilon > 0$, 由参考文献 [1] 第四章定理 2.8 知, 存在 $[-\pi, \pi]$ 上的连续函数 $h(x)$, 使

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - h(x)| dm < \varepsilon$$

由 (i) 知, 存在 N , 使当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} h(x) g(nx) dm - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) dm \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dm \right| < \varepsilon$$

于是当 $n > N$ 时,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(nx) dm - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dm \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dm \right| \\ & \leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(nx) dm - \int_{-\pi}^{\pi} h(x) g(nx) dm \right| \\ & \quad + \left| \int_{-\pi}^{\pi} h(x) g(nx) dm - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) dm \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dm \right| \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} h(x) dm \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dm \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dm \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dm \Big| \\
& \leq M \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - h(x)| dm + \varepsilon \\
& \quad + \frac{k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h(x) - f(x)| dm \\
& < \left(M + \frac{k}{2\pi} + 1 \right) \varepsilon
\end{aligned}$$

此即证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(nx) dm = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dm \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dm$$

18. 设 $f \in L^2(-\infty, \infty)$, 令 $f_n(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt$,

试证几乎处处成立:

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{\wedge}(t) \frac{\sin ht}{ht} e^{itx} dt$$

证 令 $g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2h} & |t| \leq h \\ 0 & |t| > h \end{cases}$

则 $g(t) \in L^2(-\infty, \infty)$, 且

$$g^{\wedge}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-h}^h \frac{1}{2h} e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin ht}{ht}$$

$$\begin{aligned} f_h(x) &= \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt = \int_{-h}^h \frac{1}{2h} f(x-u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) f(x-u) du = (g * f)(x) \end{aligned}$$

由参考文献[1]第五章定理3.6, 得

$$\begin{aligned} f_h(x) &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} g^\wedge(u) f^\wedge(u) e^{i\omega u} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^\wedge(u) \frac{\sin hu}{hu} e^{i\omega u} du \end{aligned}$$

19. 设 $f(x)$ 是有界连续函数, 令

$$L_\sigma(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{2t}{\sigma}\right) \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$$

证明在任何闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上, $L_\sigma(f, x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

证 由参考文献[1]第五章 §3 例3知

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = 1$$

所以

$$\begin{aligned} L_\sigma(f, x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[f\left(x + \frac{2t}{\sigma}\right) - f(x) \right] \frac{\sin^2 t}{t^2} dt \end{aligned}$$

设 $|f(x)| \leq M$, 则对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使

$$\int_{|t|>N} \frac{dt}{t^2} < \frac{\pi\varepsilon}{4M}$$

于是

$$\frac{1}{\pi} \int_{|t|>N} \left[f\left(x + \frac{2t}{\sigma}\right) - f(x) \right] \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_{|t|>N} 2M \frac{dt}{t^2} < \frac{\pi\varepsilon}{4M} \cdot \frac{2M}{\pi} = \frac{\varepsilon}{2}$$

当 $|t| \leq N$ 时, 因 $f(x)$ 在任何有限区间上都一致连续, 所以存在 $\Sigma > 0$, 使当 $\sigma > \Sigma$ 时, $\frac{2t}{\sigma}$ 充分小, 而使

$$\left| f\left(x + \frac{2t}{\sigma}\right) - f(x) \right| < \frac{\pi\varepsilon}{4N}$$

对 $|t| \leq N$, $x \in [\alpha, \beta]$ 一致成立. 因此

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\pi} \int_{-N}^N \left[f\left(x + \frac{2t}{\sigma}\right) - f(x) \right] \frac{\sin^2 t}{t^2} dt \right| \\ & \leq \frac{1}{\pi} \int_{-N}^N \frac{\pi\varepsilon}{2N} dt < \varepsilon/2 \end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned} & \left| L_{\sigma}(f, x) - f(x) \right| \\ & \leq \frac{1}{\pi} \left| \int_{-N}^N \left[f\left(x + \frac{2t}{\sigma}\right) - f(x) \right] \frac{\sin^2 t}{t^2} dt \right| \\ & \quad + \frac{1}{\pi} \left| \int_{|t|>N} \left[f\left(x + \frac{2t}{\sigma}\right) - f(x) \right] \frac{\sin^2 t}{t^2} dt \right| \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

对 $x \in [\alpha, \beta]$ 一致成立, 即 $L_{\sigma}(f, x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

20. 设 $f \in L(-\infty, \infty)$, 且 $f^{\wedge} = 0$, 则 $f \sim 0$.

证 (i) 首先证明, 当 $f \in L(-\infty, \infty)$ 时, 对 $(-\infty, \infty)$ 上几乎所有的 u 有

$$\int_0^h |f(u+x) - f(u)| dx = o(h) \quad (h \rightarrow 0)$$

成立。这样的点 u 称为 $f(x)$ 的勒贝格点。

设 $[a, b]$ 为任一有限区间, r 为一有理数, 则 $f(x) - r$ 在 $[a, b]$ 上可积, 由参考文献[1]第四章引理6.4, 对几乎所有的 $u \in [a, b]$, 有

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+u) - r| dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_u^{u+h} |f(x) - r| dx = |f(u) - r| \quad (*) \end{aligned}$$

设 $E(r)$ 是 $[a, b]$ 中不满足 $(*)$ 的点 u 的全体, 则 $mE(r) = 0$ 又设 $\{r_n\}$ 是有理点的全体, 令

$$E = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E(r_n) \right) \cup E(|f| = \infty)$$

则 $mE = 0$.

设 $u_0 \in [a, b] - E$, 任取 $\varepsilon > 0$, 并取有理数 r_n , 满足

$$|f(u_0) - r_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

则

$$\left| |f(u_0+x) - r_n| - |f(u_0+x) - f(u_0)| \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

因此

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{h} \int_0^h |f(u_0+x) - r_n| dx \right. \\ & \left. - \frac{1}{h} \int_0^h |f(u_0+x) - f(u_0)| dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

因为 $u_0 \in E$, 所以存在 $\delta(\varepsilon) > 0$, 当 $|h| < \delta$ 时,

$$\left| \frac{1}{h} \int_0^h |f(u_0 + x) - r_n| dx - |f(u_0) - r_n| \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

所以

$$\frac{1}{h} \int_0^h |f(u_0 + x) - r_n| dx < \frac{2}{3} \varepsilon$$

于是

$$\frac{1}{h} \int_0^h |f(u_0 + x) - f(u_0)| dx < \varepsilon$$

即

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(u_0 + x) - f(u_0)| dx = 0$$

所以, $[a, b]$ 中的几乎所有的点都为 $f(x)$ 的勒贝格点。因 $[a, b]$ 是任一有限区间, 可见 $(-\infty, \infty)$ 中几乎所有的点都为 $f(x)$ 的勒贝格点。

(ii) 再证明, 若 $f \in L(-\infty, \infty)$, u 为 $f(x)$ 的勒贝格点时, 有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|x|}{R}\right) e^{iux} \hat{f}(x) dx = f(u)$$

事实上, 对任何 $R > 0$, $u \in (-\infty, \infty)$, 令

$$S_R(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|x|}{R}\right) e^{iux} \hat{f}(x) dx$$

将 $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(t) dt$ 代入 $S_R(u)$ 中, 并利用 Fubini

定理, 得

$$S_R(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|x|}{R}\right) e^{ix(u-t)} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1 - \cos R(u-t)}{R(u-t)^2} dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u-t) \frac{1 - \cos Rt}{Rt^2} dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [f(u+t) + f(u-t)] \frac{1 - \cos Rt}{Rt^2} dt
\end{aligned}$$

由于

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos Rt}{Rt^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

所以

$$\begin{aligned}
S_R(u) - f(u) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(u+t) + f(u-t) \\
&\quad - 2f(u)] \frac{1 - \cos Rt}{t^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} = I_1 + I_2
\end{aligned}$$

令

$$\varphi(t) = |f(u+t) + f(u-t) - 2f(u)|$$

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(y) dy$$

则对于给定的 δ , 当 $\frac{1}{R} < \delta$ 时,

$$|\pi I_1| \leq \int_0^{\delta} |f(u+t) + f(u-t) - 2f(u)| dt$$

$$|f(u) + f(u-t) - 2f(u)| \frac{1 - \cos Rt}{Rt^2} dt = \int_0^{\frac{1}{R}} + \int_{\frac{1}{R}}^{\delta} = I'_1 + I'_2$$

因为 u 是 $f(x)$ 的勒贝格点, 所以 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0$, 对于给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$, 当 $0 \leq t \leq \delta$ 时, $\Phi(t) \leq \varepsilon t$.

因为 $1 - \cos \theta \leq \frac{\theta^2}{2}$, 所以

$$I'_1 \leq \frac{R}{2} \int_0^{\frac{1}{R}} \varphi(t) dt = \frac{R}{2} \Phi\left(\frac{1}{R}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

又因为 $1 - \cos \theta < 2$, 所以

$$I''_1 \leq 2 \int_{\frac{1}{R}}^{\delta} \frac{\varphi(t)}{Rt^2} dt = \frac{2\Phi(\delta)}{R\delta^2} - 2R\Phi\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$+ 4 \int_{\frac{1}{R}}^{\delta} \frac{\Phi(t)}{Rt^3} dt \leq \frac{2\varepsilon}{R\delta} + 4\varepsilon \int_{\frac{1}{R}}^{\delta} \frac{dt}{Rt^2} \leq 2\varepsilon + 4\varepsilon = 6\varepsilon$$

因 $|I_2| \leq \frac{2}{\pi R} \int_{\delta}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt$, 而 $\int_{\delta}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt < \infty$, 故存

在 R_0 , 当 $R > R_0$ 时, $|I_2| < \varepsilon$, 于是

$$|S_R(u) - f(u)| < \frac{\varepsilon}{2\pi} + \frac{6\varepsilon}{\pi} + \varepsilon$$

即证得

$$\lim_{R \rightarrow \infty} S_R(u) = f(u)$$

(iii) 最后证 $f \sim 0$.

因为 $\hat{f} = 0$, 由(ii), 当 u 为 f 的勒贝格点时, 有 $f(u) = 0$, 又由(i), 对 $(-\infty, \infty)$ 上的几乎所有的 u , $f(u) = 0$, 即

$$f \sim 0$$

21. 若 $mE < \infty$, $p > 0$, 证明 $L^p(E) \supset L^\infty(E)$; 若 $p_i \rightarrow \infty$ ($p_i > 1$), 问 $L^\infty(E) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} L^{p_i}(E)$ 是否成立.

答: $L^\infty(E) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} L^{p_i}(E)$ 不成立.

22. 设 $f(x) \in L^p(-\infty, \infty)$, $1 \leq p < \infty$, 而 $g(x) \in L^q(-\infty, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则

(i) $(f * g)(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上处处连续, 且有

$$|(f * g)(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad x \in (-\infty, \infty)$$

(ii) 若 $1 < p < \infty$, 则有 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (f * g)(x) = 0$.

提示 首先证明, $f \in L^p(-\infty, \infty)$ ($p \geq 1$) 具有平均连续性

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0$$

再利用 Hölder 不等式及平均连续性证得 (i).

23. 设周期为 2π 的函数族 $\{g_n(x)\}$ 满足

$$(i) \int_{-\pi}^{\pi} g_n(x) dx = 2\pi;$$

$$(ii) \text{ 存在 } M > 0, \text{ 使对一切 } n, \text{ 有 } \int_{-\pi}^{\pi} |g_n(x)| dx \leq M,$$

$$(iii) \text{ 对任何 } 0 < \delta < \pi, \text{ 有 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |g_n(x)| dx = 0$$

对于周期为 2π 的函数, 令

$$I_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) g_n(u) du$$

则对每个以 2π 为周期且在 $[-\pi, \pi]$ 上可积的函数 $S(x)$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} [I_n(f, x) - f(x)] S(x) dx = 0$$

提示 利用Fubini定理, 得

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\pi}^{\pi} [I_n(f, x) - f(x)] S(x) dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|u| \leq \delta} |g_n(u)| \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) [S(x+u) - S(x)] dx \right| du \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |u| \leq \pi} |g_n(u)| \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) [S(x+u) \right. \\ & \quad \left. - S(x)] dx \right| du \end{aligned}$$

对于不等式右边的第一项, 利用 $S(x)$ 的平均连续性知其可以小于任意小, 对于其第二项, 根据 $g_n(x)$ 满足的性质 (iii) 知其可以小于任意小。

第四章 距离空间和赋范线性空间

一、基本概念和主要定理

距离和距离空间 设 X 是任一非空集合, $P(x, y)$ 是 $X \times X \rightarrow R$ 的函数, 如果满足

(i) 非负性: $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0$ 的充要条件是 $x = y$;

(ii) 对称性: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

(iii) 三角不等式: $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$

则称 $\rho(x, y)$ 为 x 和 y 之间的距离, (X, ρ) 为以 ρ 为距离的距离空间。

完备性 设 $\{x_n\} \subset (X, \rho)$, 如果对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 使得当 $n, m > N$ 时有 $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$, 则称 $\{x_n\}$ 为 (X, ρ) 中的基本序列(柯西序列), 如果距离空间 (X, ρ) 中任一基本序列均收敛于 X 中一点, 则称 (X, ρ) 为完备距离空间。

可分性 若 (X, ρ) 中存在可列稠密子集, 则称 (X, ρ) 为可分距离空间; 设 $A \subset (X, \rho)$, 若 A 中存在可列稠密子集, 则称 A 可分。

列紧集 设无穷集 $A \subset (X, \rho)$, 如果 A 的任一无穷点列必含有一个收敛点列, 则称 A 为列紧集; 一个列紧闭集称作自列紧集。

全有界 设 $A, B \subset (X, \rho)$, 给定 $\varepsilon > 0$, 若 $\bigcup_{x \in B} S(x, \varepsilon) \supset A$, 则称 B 是 A 的一个 ε 网 (这里 $S(x, \varepsilon) = \{y \in X: \rho(y, x) < \varepsilon\}$); 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, A 总存在有穷的 ε 网 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 则称集合 A 全有界。

紧集 设 $A \subset (X, \rho)$, 如果从 A 的任一开复盖 $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 中可取出有穷多个开集复盖 A , 则称 A 为紧集; 若 (X, ρ) 本身是紧的, 则称 (X, ρ) 为紧空间。 $A \subset (X, \rho)$ 为紧集的充要条件是 A 为自列紧集。

设 $A, B \subset (X, \rho)$, 数

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$$

叫做点 x 到集 A 的距离; 数

$$\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y)$$

叫做集 A 与 B 间的距离; 数

$$\rho_H(A, B) = \sup_{x \in A, y \in B} \{\rho(x, B), \rho(y, A)\}$$

叫做集 A 与 B 间的豪斯道夫距离。

范数和赋范线性空间 设 X 是实 (或复) 线性空间, $P(x)$ 是 $X \rightarrow R$ 的函数, 如果

(i) $P(x) \geq 0$, 且 $P(x) = 0$ 的充要条件是 $x = 0$;

(ii) $P(\alpha x) = \|\alpha\| P(x)$ (其中 α 属于数域 K);

(iii) $P(x + y) \leq P(x) + P(y)$

则称 $P(x)$ 为 x 的范数, 常记 $P(x) = \|x\|$, 并称 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间。对赋范线性空间 $(X, \|\cdot\|)$, 我们令 $\rho(x, y) = \|x - y\|$, 则 (X, ρ) 便成为一个距离空间, 如

果 X 按 $\rho(x, y) = \|x - y\|$ 是完备的, 则称 $(X, \|\cdot\|)$ 为Banach空间。

直接和 设 X 为赋范线性空间, X_1, X_2 为 X 的子空间, 如果对任一 $x \in X$, 有唯一表示式

$$x = x_1 + x_2$$

其中 $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$, 则记 $X = X_1 + X_2$, 称 X 为子空间 X_1 和 X_2 的**直接和**。

积空间 设 X_1, X_2 为赋范线性空间, 令

$$X_1 \times X_2 = \{(x, y) | x \in X_1, y \in X_2\}$$

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$$

则称 $X_1 \times X_2$ 为 X_1 和 X_2 的积空间。易知如果 X_1, X_2 完备, 则 $X_1 \times X_2$ 也是Banach空间, 且 $X_1 \times X_2$ 与 $X_1 + X_2$ 代数同构。

商空间 设 F 为赋范线性空间 X 的一个闭子空间, 令 $X/F = \{x | x \text{ 代表一个等价类, } x_1, x_2 \in x \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in F\}$ 我们称 X/F 为商空间。如果规定 X/F 中元素的范数为

$$\|x\| = \inf_{x \in x} \|x\|$$

则当 X 完备时, X/F 也完备。

Hamel基和Schauder基 设 X 为线性空间, $B \subset X$, 如果 X 中任一元素 x 均可唯一地表成 B 中有限个元素的线性组合, 则称子集 B 为 X 的Hamel基, 设赋范线性空间 $(X, \|\cdot\|)$

中存在一可列集 $\{e_n\}$, 使得对任一 $x \in X$, 有 $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$

(级数在 $(X, \|\cdot\|)$ 中收敛), 且表示唯一, 则称 $\{e_n\}$ 为 $(X, \|\cdot\|)$ 的Schauder基。

同胚映射和等距映射 如果映射 T 是 $(X, \rho) \rightarrow (X_1, \rho_1)$ 上的一对一映射, 且映射 T 以及逆映射 T^{-1} 都连续, 则称 T 为 X 到 X_1 上的同胚映射, 称 (X, ρ) 与 (X_1, ρ_1) 同胚; 如果存在 (X, ρ) 到 (X_1, ρ_1) 上的映射 T , 使对一切 $x, y \in X$, 有

$$\rho_1(Tx, Ty) = \rho(x, y)$$

则称 T 为 X 到 X_1 上的等距映射, 称 X 和 X_1 等距。

定理1 (完备化定理) 对任一距离空间 (X, ρ) , 都存在完备化空间, 而且任何两个完备化空间都等距。即存在一个完备距离空间 X_0 , 使 X 等距于 X_0 的一个稠密子空间 X'_0 , 且除去“等距不计外”, X_0 是唯一的。

定理2 设 (X, ρ) 完备, $A \subset (X, \rho)$, 则 A 列紧等价 A 全有界, 也等价于对任给的 $\varepsilon > 0$, A 存在列紧的 ε 网。

定理3 (Arzela-Ascoli) 集合 $A \subset C[a, b]$ 列紧的充要条件是下列两条件成立:

(i) 集合 A 一致有界, 即存在常数 K , 使对一切 $x(t) \in A$, 有 $|x(t)| \leq K$;

(ii) 集合 A 是等度连续的, 即对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得任何 $x(t) \in A$ 以及任意的 $t_1, t_2 \in [a, b]$, 只要 $|t_1 - t_2| < \delta$, 就有

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$$

设 T 为 $(X, \rho) \rightarrow (X, \rho)$ 的映射, 如果存在 $0 < \theta < 1$, 使得对一切 $x, y \in X$, 有

$$\rho(Tx, Ty) \leq \theta \rho(x, y)$$

则称 T 为 X 上的压缩映射。

定理4 (压缩映射原理) 完备距离空间 (X, ρ) 中的压缩映射 T 有唯一的不动点, 且对任何 $x_0 \in X$, 序列 $x_n = Tx_{n-1}$ ($n=1, 2, \dots$) 收敛于 T 的不动点。

黎斯引理 设 $X_0 \subset (X, \|\cdot\|)$ 是真闭子空间, 则对任给的 $0 < \varepsilon < 1$, 存在 $x_0 \in X$, $\|x_0\| = 1$, 使

$$\rho(x_0, X_0) \geq 1 - \varepsilon$$

定理5 X 为有穷维赋范线性空间的充要条件是 X 的任一有界子集 A 是列紧集。[5] 证。

二、例题、习题与解法

1. 设 R^n 是 n 维矢量组成的集, 在 R^n 中定义距离如下:

$$\rho_1(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k - \eta_k|$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ 则 R^n 按距离 ρ_1 是距离空间。

解 ρ_1 显然满足距离公理三个条件, 故 R^n 按 ρ_1 是距离空间。

2. 设 X 为距离空间, $A \subset X$, 证明 A 的一切内点组成的集必为开集。

证 设 $B = \{x \in A: x \text{ 为 } A \text{ 的内点}\}$, 任取 $x \in B$, 因为 x 是 A 的内点, 故必存在 $\delta > 0$, 使开球 $S(x, \delta) \subset A$, 现证明 $S(x, \delta) \subset B$ 。事实上对于 $S(x, \delta)$ 中任一点 y , 令

$$\delta_1 = \delta - \rho(x, y) > 0$$

则

$$S(y, \delta_1) \subset S(x, \delta) \subset A$$

故 y 是 A 的内点, 也就是说 $S(x, \delta) \subset B$, 从而 B 为开集。

3. 设 X 为距离空间, $A \subset X$, 令

$$f(x) = \inf_{y \in A} \rho(x, y) \quad (x \in X)$$

求证 $f(x)$ 是连续函数。

证 任取 $x, x_0 \in X$, 则由

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_0) + \rho(x_0, y)$$

可得

$$\inf_{y \in A} \rho(x, y) \leq \rho(x, x_0) + \inf_{y \in A} \rho(x_0, y) \quad (1)$$

同理可得

$$\inf_{y \in A} \rho(x_0, y) \leq \rho(x, x_0) + \inf_{y \in A} \rho(x, y) \quad (2)$$

由(1), (2)立即得

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \rho(x, x_0)$$

故 $f(x)$ 为连续函数。

4. 证明:

(i) 距离空间中的闭集必为可列个开集之交。

(ii) 距离空间中的开集必为可列个闭集的并。

证 (i) 设 F 为距离空间 (X, ρ) 中任一闭集, 我们令

$$G_n = \{x \in X: \rho(x, F) < \frac{1}{n}\}$$

则容易证明每个 G_n 为开集, 且

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

(ii) 对于 X 中任一开集 G , 令 $F = \mathcal{C}G$, 则由(i)

可知存在开集 G_n , 使 $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, 从而

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$$

其中 G_n 为 X 的闭集。

5. 设 X 是可分的距离空间, $\{G_\alpha\} (\alpha \in J)$ 为 X 的一个覆盖, 则从 $\{G_\alpha\}$ 中可取出可列个集组成 X 的一个覆盖。

本题可参阅参考文献 [2] 定理 2.4 (p38—p39) 必要性的证明。

6. 设 X 为距离空间, F_1, F_2 为 X 中的两个不相交的闭集, 则存在定义在 X 上的连续函数 $f(x)$, 使当 $x \in F_1$ 时, $f(x) = 0$, 当 $x \in F_2$ 时, $f(x) = 1$ 。

证 我们记 $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$, 并且令

$$f(x) = \frac{\rho(x, F_1)}{\rho(x, F_1) + \rho(x, F_2)}$$

则据本章第 3 题知 $f(x)$ 是 X 上的连续函数, 且

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in F_1 \\ 1 & x \in F_2 \end{cases}$$

7. 设 X 为距离空间, F_1, F_2 为 X 中不相交的闭集, 证明存在开集 G_1, G_2 , 使得 $G_1 \cap G_2 = \emptyset$; $G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2$ 。

证法一 利用第 6 题, 令

$$f(x) = \frac{\rho(x, F_1)}{\rho(x, F_1) + \rho(x, F_2)}$$

则 $f(x)$ 连续, $0 \leq f(x) \leq 1$, 且

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in F_1 \\ 1 & x \in F_2 \end{cases}$$

再令

$$G_1 = \{x \in X: f(x) < \frac{1}{2}\}$$

$$G_2 = \{x \in X: f(x) > \frac{1}{2}\}$$

则据参考文献 [2] 定理1.5 (p15) 知 G_1, G_2 均为开集, 且显然有 $G_1 \cap G_2 = \phi; G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2$.

证法二 任取 $x \in F_1$, 则 $d(x) = \rho(x, F_2) > 0$, 作开球 $S(x, \frac{1}{2}d(x))$, 令

$$G_1 = \bigcup_{x \in F_1} S(x, \frac{1}{2}d(x))$$

同理 $y \in F_2$, 有 $d(y) = \rho(y, F_1) > 0$, 令

$$G_2 = \bigcup_{y \in F_2} S(y, \frac{1}{2}d(y))$$

则 G_1, G_2 均为开集, 且 $G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2$. 我们证明 $G_1 \cap G_2 = \phi$. 设不然, 存在一点 $a \in G_1 \cap G_2$, 则必存在 $x_0 \in F_1, y_0 \in F_2$, 使

$$a \in S(x_0, \frac{1}{2}d(x_0)) \cap S(y_0, \frac{1}{2}d(y_0))$$

不妨设 $d(x_0) \geq d(y_0)$, 则

$$\begin{aligned} d(x_0) = \rho(x_0, F_2) &\leq \rho(x_0, y_0) \leq \rho(x_0, a) + \rho(a, y_0) \\ &< \frac{1}{2}d(x_0) + \frac{1}{2}d(y_0) \leq d(x_0) \end{aligned}$$

矛盾, 故 $G_1 \cap G_2 = \phi$.

8. 设 $f(X)$ 是由距离空间 X 到距离空间 X_1 中的连续映射, A 在 X 中稠密, 证明 $f(A)$ 在 $f(X)$ 中稠密.

证 任取 $z \in f(X)$, 则存在 $x \in X$, 使 $z = f(x)$, 因为 $\overline{A} = X$, 故存在 $x_n \in A$, 使 $x_n \xrightarrow{X} x$, 再据 $f(x)$ 的连续性得,

$$f(x_n) \xrightarrow{X_1} f(x), \quad \text{所以} \quad \overline{f(A)} = f(X).$$

9. 求证 l^p 是一个完备的、可分的距离空间。其中

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \eta_n|^p \right)^{1/p} \quad (p \geq 1)$$

证 $\rho(x, y)$ 是一个距离显然。

(i) 完备性:

设 $\{x_n\} \subset l^p$ 为基本列, 其中 $x_n = (\xi_i^{(n)})$, 则对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $n, m \geq N$ 时, 有

$$\rho(x_n, x_m) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon \quad (1)$$

则当 $n, m \geq N$ 时, 有

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (2)$$

故对每个 i , $\xi_i^{(n)}$ 收敛。现设 $\xi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^{(n)}$, $x = (\xi_i)$,

下面证明 $x \in l^p$, 且 $x_n \xrightarrow{l^p} x$ 。

首先由 (1) 知对任意的自然数 k 都有

$$\sum_{i=1}^k |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}|^p < \varepsilon^p \quad (n, m \geq N)$$

固定 $n \geq N$, 让 $m \rightarrow \infty$, 得

$$\sum_{i=1}^k |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p \leq \varepsilon^p \quad (n \geq N)$$

再令 $k \rightarrow \infty$, 得

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p \leq \varepsilon^p \quad (n \geq N)$$

故 $x \in l^p$, $x_n \xrightarrow{l^p} x$, 完备性得证。

(ii) 可分性:

令 $E_0 = \{x: x = (r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, \dots), \text{ 其中 } n \text{ 为任一自然数, } r_i \text{ 均为有理数}\}$ (这儿不妨设 l^p 为实空间), 则 E_0 为 l^p 的一个可数子集。下面证明 E_0 在 l^p 中稠。

任取 $x \in l^p$, $\varepsilon > 0$, 首先存在 n , 使

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

对于 ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 必存在 r_1, r_2, \dots, r_n , 使

$$\sum_{i=1}^n |\xi_i - r_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

故存在点 $x_0 = (r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, \dots) \in E_0$, 使

$$\rho(x, x_0) < \varepsilon$$

l^p 可分得证。

10. 证明多项式全体在 $C^k[a, b]$ 中稠密, 其中 $C^k[a, b]$ 表示 $[a, b]$ 上 k 次连续可微函数的全体, 距离定义为

$$\rho(x, y) = \sum_{j=0}^k \max_{a \leq t \leq b} |x^{(j)}(t) - y^{(j)}(t)|$$

证 任取 $x(t) \in C^k[a, b]$, $\varepsilon > 0$, 因为 $x^{(k)}(t) \in C[a, b]$, 则存在多项式 $P(t)$, 使

$$\max_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t) - P(t)| < \frac{\varepsilon}{(k+1)A^k}$$

此处 $A = \max\{1, b-a\}$, 我们令

$$P_1(t) = \int_a^t P(u) du + x^{(k-1)}(a), \dots$$

一般地

$$P_j(t) = \int_a^t P_{j-1}(u) du + x^{(k-j)}(a)$$

$$(j=1, 2, \dots, k, P_0(t)=P(t))$$

显然有

$$x^{(j-1)}(t) = \int_a^t x^{(j)}(u) du + x^{(j-1)}(a) \\ (j=1, 2, \dots, k)$$

$$P_k^{(j)}(t) = P_{k-j}(t) \quad (j=1, 2, \dots, k)$$

则 $P_k(t)$ 是一个多项式, 且满足

$$\rho(P_k(t), x(t)) < \epsilon$$

从而多项式全体在 $C^k[a, b]$ 中稠密。

[注] 本题还可用其它方法证明。

11. 设 X 为距离空间, $A \subset X$, 如果 A 按照 X 的距离是完备的距离空间, 证明 A 是闭集。

证 任取 $x \in \overline{A}$, 则存在 $x_n \in A$, 使 $x_n \rightarrow x$. 由于收敛点列 $\{x_n\}$ 必是 A 中基本列, A 是完备距离空间, 则 $\{x_n\}$ 必在 A 中收敛, 但极限元是唯一的, 故 $x \in A$, A 是闭集。

12. 证明基本列是有界的。

本题证明留给读者。

13. 设 X 是完备的距离空间, $\{F_n\} (n=1, 2, 3, \dots)$ 为 X 中一系列闭集:

$$F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$$

并且 $F_n \neq \emptyset$, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(F_n) = 0$ ($d(F_n)$ 表 F_n 的直径, 即

F_n 中任两点的距离的上确界), 则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

证 不妨设 $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \dots$, 则可取 $x_n \in F_n - F_{n+1} (n=1, 2, 3, \dots)$ 得 X 中一点列 $\{x_n\}$, 因为当 $n > m$ 时, 有 $x_n, x_m \in F_m$, 所以 $n > m$ 时

$$\rho(x_n, x_m) \leq d(F_m)$$

据条件 $d(F_m) \rightarrow 0$ ，立即知 $\{x_n\}$ 是 X 中基本列，由于 X 是完备的，则存在 $x \in X$ ，使 $x_n \rightarrow x$ 。下面证明 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ 。事实上对任一自然数 m ，当 $n > m$ 时， $x_n \in F_m$ ， F_m 为闭集，故 $x \in F_m$ ，从而 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ 。

14. 举例说明全有界集不一定是列紧的。

解 取 $X = (0, 1)$ ， X 中距离 $\rho(x, y) = |x - y|$ ，则 $A = (0, \frac{1}{2}) \subset X$ 必全有界，但非列紧。

15. 设 $\{F_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 是紧空间中的一列闭集：

$$F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$$

并且 $F_n \neq \phi$ ，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \phi$ 。

证 设 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \phi$ ，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}F_n = X$ ， $\{G_n\} = \{\mathcal{C}F_n\}$

是 X 的一个覆盖，由 X 的紧性知存在 N ，使

$$\bigcup_{i=1}^N G_i = X$$

又因为 $G_n \subset G_{n+1}$ ，所以 $G_N = X$ ，这就推出 $F_N = \phi$ ，矛盾，

故 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \phi$ 。

[注] 亦可取 $x_n \in F_n - F_{n+1}$ ，然后证明 $\{x_n\}$ 的一个聚点属于 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ 。

16. 证明紧集的闭子集也是紧的。

证法一 设 A 为紧集, $B \subset A$ 为闭集, 因为 A 是紧集 $\Leftrightarrow A$ 自列紧, 从而 B 是列紧闭集, 故 B 为自列紧的, 即 B 为紧集。

证法二 设 $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为 B 的任一开复盖, $X - B$ 是开集, 则 $\{G_\alpha\} \cup \{X - B\}$ 为 A 的一个开复盖, A 紧, 则从这一开复盖中可取出有穷个开复盖 A , 不妨设 $\left(\bigcup_{\alpha=1}^n G_\alpha\right) \cup (X - B) \supset A$, 于是 $\bigcup_{\alpha=1}^n G_\alpha \supset B$, 故 B 为紧集。

17. 证明如果 F_1, F_2 是距离空间 X 中的紧集, 则必存在 $x_0 \in F_1, y_0 \in F_2$, 使

$$\rho(F_1, F_2) = \rho(x_0, y_0)$$

其中 $\rho(F_1, F_2) = \inf_{\substack{x \in F_1 \\ y \in F_2}} \rho(x, y)$.

证 据 \inf 的定义, 必存在 $x_n \in F_1, y_n \in F_2$, 使

$$\rho(F_1, F_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n)$$

因为 F_1, F_2 为 X 中紧集, 必存在子序列 $\{n_k\}$ 使 $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in F_1, y_{n_k} \rightarrow y_0 \in F_2$, 再据 $\rho(x, y)$ 的连续性, 即得

$$\rho(F_1, F_2) = \rho(x_0, y_0)$$

18. 证明定义在紧空间上的连续函数必是有界的, 而且达到它的上、下确界。

证 设 X 为紧空间, $f(x)$ 为定义在 X 上的连续函数, 我们证明 $f(X)$ 是紧集。因为 X 为紧空间, 必自列紧, 任取 $y_n = f(x_n) \in f(X)$, 存在 $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in X$, 利用 $f(x)$ 的连续性可得

$$y_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(x_0) \in f(X)$$

故 $f(X)$ 为自列紧的, 即 $f(X)$ 为紧集, 从而 $f(X)$ 是 R^1 中有

界集。

现设 $M = \sup_{x \in X} f(x)$, $m = \inf_{x \in X} f(x)$, 则存在 $x_n \in X$, $y_n \in X$, 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = m$$

利用 X 的紧性, 存在

$$x_{n_k} \longrightarrow x_0 \in X, \quad y_{n_k} \longrightarrow y_0 \in X$$

易知 $M = f(x_0)$, $m = f(y_0)$ 。

19. 证明定义在紧空间上的连续函数必是一致连续的 (一致连续的定义与数学分析中的相同)。

证 设 X 为紧空间, $f(x)$ 定义在 X 上连续, 任取 $\varepsilon > 0$, 对每一个 $x \in X$, 存在 $\delta_x > 0$, 使得当 $y \in S(x, \delta_x)$ 时有

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\bigcup_{x \in X} S(x, \delta_x) = X$, 因为 X 紧, 必存在有限个点 x_1, x_2, \dots, x_{n_0} , 使

$$\bigcup_{i=1}^{n_0} S(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}) = X$$

现取 $\delta = \min_{1 \leq i \leq n_0} \frac{\delta_{x_i}}{2}$, 则当 $\rho(x', x'') < \delta$ 时 (不妨

设 $x'' \in S(x_{i_0}, \frac{\delta_{x_{i_0}}}{2})$, 有

$$\rho(x', x_{i_0}) \leq \rho(x', x'') + \rho(x'', x_{i_0}) \leq \delta_{x_{i_0}}$$

故 $|f(x'') - f(x')| \leq |f(x') - f(x_{i_0})| + |f(x_{i_0}) - f(x'')| < \varepsilon$

所以 $f(x)$ 是一致连续的。

20. 证明 l^p 中的子集 A 列紧的充要条件是

(i) 存在 $K > 0$, 使得对一切 $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\} \in A$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < K$$

(ii) 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $m > N$ 时, 对一切 $x \in A$ 有

$$\sum_{n=m}^{\infty} |\xi_n|^p < \varepsilon$$

证法一 必要性。设 A 列紧, 则 A 全有界, 条件(i)显然成立。下证条件(ii)。任给 $\varepsilon > 0$, 因为 A 全有界, 必存在有穷的 $\frac{1}{2}\varepsilon^{1/p}$ -网 $\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}\}$, 对于 x_1, x_2, \dots, x_{n_0} , 存在 N , 使得当 $m > N$ 时有

$$\left\{ \sum_{n=m}^{\infty} |\xi_n^{(i)}|^p \right\}^{1/p} < \varepsilon^{1/p/2}$$

(对于 $i = 1, 2, \dots, n_0$ 一致成立)

现任取 $x \in A$, 首先存在 x_i ($1 \leq i \leq n_0$) 使

$$\rho(x, x_i) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \xi_n^{(i)}|^p \right\}^{1/p} < \varepsilon^{1/p/2}$$

则

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{n=m}^{\infty} |\xi_n|^p \right\}^{1/p} &\leq \left\{ \sum_{n=m}^{\infty} |\xi_n - \xi_n^{(i)}|^p \right\}^{1/p} \\ &+ \left\{ \sum_{n=m}^{\infty} |\xi_n^{(i)}|^p \right\}^{1/p} < \varepsilon^{1/p/2} + \varepsilon^{1/p/2} = \varepsilon^{1/p} \end{aligned}$$

故条件(ii)成立。

充分性。因为 l^p 完备，据参考文献[2]定理2.1推论(p30)，只需证明对任给的 $\varepsilon > 0$ ， A 存在列紧的 ε -网。

任给 $\varepsilon > 0$ ，由条件(ii)，存在 N ，当 $m > N$ 时有

$$\sum_{n=m}^{\infty} |\xi_n|^p < \varepsilon^p \quad (\text{对一切 } x = (\xi_n) \in A \text{ 成立})$$

我们令

$$B = \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, 0, \dots) | (\xi_n) \in A\}$$

则 B 是 A 的一个 ε -网。现证 B 列紧，事实上，据条件(i)对一切 $(\xi_n) \in A$ 成立

$$|\xi_n| \leq K^{1/p} \quad (\forall n)$$

故对一切 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, 0, \dots) \in B$ 也有

$$|\xi_n| \leq K^{1/p} \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

则存在 $\xi_n^{(i)} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \xi_n^{(0)} \quad (n = 1, 2, \dots, N)$ ，记

$$x_i = (\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \dots, \xi_N^{(i)}, 0, \dots)$$

$$x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_N^{(0)}, 0, \dots)$$

则 $x_0 \in l^p$ ，且 $\rho(x_i, x_0) \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty)$ ，从而 B 是列紧的。

证法二 必要性。只要证明条件(ii)成立，用反证法。设存在 $\varepsilon_0 > 0$ ，对一切自然数 m ，存在 $x_m \in A$ 使

$$\sum_{n=m}^{\infty} |\xi_n^{(m)}|^p \geq \varepsilon_0 \quad (1)$$

因为 A 列紧，必可从 $\{x_m\}$ 中取出一收敛子序列，不妨设 $x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x \in l^p$ ，记 $x = (\xi_n)$ ，则存在 N ，当 $m > N$ 时有

$$\left\{ \sum_{n=m}^{\infty} |\xi_n|^P \right\}^{1/P} < \frac{1}{2} \varepsilon_0^{1/P}$$

以及

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n^{(m)} - \xi_n|^P \right\}^{1/P} < \frac{1}{2} \varepsilon_0^{1/P}$$

故当 $m > N$ 时有

$$\left\{ \sum_{n=m}^{\infty} |\xi_n^{(m)}|^P \right\}^{1/P} < \varepsilon_0^{1/P}$$

这与 (1) 式矛盾, 因此条件 (ii) 成立。

充分性。任取 A 中一无穷点列 $(\xi_n^{(k)})$, 直接证明存在收敛子序列。首先据条件 (i) 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n^{(k)}|^P < K \quad (\forall k \text{ 成立}) \quad (2)$$

据条件 (ii) 知, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $m > N$ 时对一切 k 成立

$$\sum_{n=m}^{\infty} |\xi_n^{(k)}|^P < \varepsilon \quad (3)$$

由 (2) 知对每一个 n , $\xi_n^{(k)}$ 关于 k 是一个有界数列, 故可按对角线手续取出一子序列 $\{n_k\}$, 使

$$\xi_n^{(n_k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \xi_n \quad (\forall n)$$

令 $x = (\xi_n)$, $x_{n_k} = (\xi_n^{(n_k)})$, 我们证明 $x \in l^P$, 且

$$x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{l^P} x. \text{ 事实上, 由 (2) 对一切 } N \text{ 成立 } \sum_{n=1}^N |\xi_n^{(n_k)}|^P$$

$$\leq K, \text{ 令 } k \rightarrow \infty, \text{ 便得 } \sum_{n=1}^N |\xi_n|^P \leq K, \text{ 故 } x \in l^P. \text{ 又因为}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \xi_n^{(n_k)} - \xi_n \right|^p &= \sum_{n=1}^N \left| \xi_n^{(n_k)} - \xi_n \right|^p \\ &+ \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \xi_n^{(n_k)} - \xi_n \right|^p \leq \sum_{n=1}^N \left| \xi_n^{(n_k)} - \xi_n \right|^p \\ &+ 2^p \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \xi_n^{(n_k)} \right|^p + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \xi_n \right|^p \right) \end{aligned}$$

立即可得 $x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{l^p} x$.

21. 证明 S 空间中的子集 A 列紧的充要条件是对每个 n ($n = 1, 2, 3, \dots$), 存在 $C_n > 0$, 使得对一切 $x = \{ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots \} \in A$, 有

$$|\xi_n| \leq C_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

证 必要性:

证法一 用反证法, 设 A 列紧, 但存在 n_0 , 使对一切自然数 k 有 $x_k = (\xi_n^{(k)}) \in A$, 使

$$\left| \xi_{n_0}^{(k)} \right| \geq k$$

因为 A 列紧, 不妨设 $x_k \xrightarrow{S} x$, 据参考文献[2]p20例11知

$$x_k \xrightarrow{S} x \Leftrightarrow \xi_n^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \xi_n \quad (\forall n)$$

收敛数列必有界, 所以存在 $K > 0$, 使 $\left| \xi_{n_0}^{(k)} \right| < K (\forall k)$, 矛盾. 故对一切 $x \in A$, 有

$$|\xi_n| \leq C_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

证法二 定义映射 $\phi_n: S \rightarrow R^1$ 如下, $x = (\xi_n) \in S$,

令 $\phi_n(x) = \xi_n$, 显然 ϕ_n 是连续的, 故 $\phi_n(A)$ 列紧, $\phi_n(A)$ 必为 R^1 中有界集, 即对每个 n , 存在 $C_n > 0$, 使

$$|\xi_n| \leq C_n \quad (\text{对一切 } (\xi_n) \in A \text{ 成立})$$

充分性:

证法一 设条件成立, 任取 $\{x_k\} \subset A$, 其中 $x_k = (\xi_p^{(k)})$,

因为 $|\xi_p^{(k)}| \leq C_n (\forall k)$, 则按对角线手续, 取出子序列 $\{n_k\}$, 使

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_p^{(n_k)} = \xi_n \quad (\forall n)$$

故 A 列紧。

证法二 因为 S 完备, 故只须证明 A 存在列紧 ε -网 (对一切 $\varepsilon > 0$)。任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $m > N$ 时, 有

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

令

$$B = \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, 0, \dots) \mid (\xi_n) \in A\}$$

显然, B 是 A 的 ε -网, 又因为 B 中之点只有前面 N 个坐标不为零, 且

$$|\xi_n| \leq C_n \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

则容易证明 B 是列紧集。

22. 证明列紧集的闭包必是自列紧集。

证 设 A 列紧, 任取 $\{x_n\} \subset \overline{A}$, 对每个 n , 由于 $x_n \in \overline{A}$, 必存在 $y_n \in A$, 使 $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ 。因为 A 列紧, 对于 $\{y_n\} \subset A$, 可取出子序列 $y_{n_k} \rightarrow y \in \overline{A}$, 易证 $x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} y$,

故 \overline{A} 自列紧。

23. 在数轴上添加无穷远点 $-\infty, +\infty$, 得到的集记为 R^1 , 试在 R^1 中适当地定义距离, 使 R^1 与区间 $[0, 1]$ 同胚 ($[0, 1]$ 的距离与 R^1 同)。

解 $[0, 1]$ 中, $\rho(x, y) = |x - y|$, 在 R^1 中我们令

$$\rho_1(x, y) = \frac{1}{\pi} |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$$

规定 $\operatorname{arctg}(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$, 易知 ρ_1 是一个距离, 作 $[0, 1] \rightarrow R^1$ 的映射 $g(x)$ 如下:

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}(\pi x - \frac{\pi}{2}) & \text{当 } x \in (0, 1) \text{ 时} \\ -\infty & x = 0 \text{ 时} \\ +\infty & x = 1 \text{ 时} \end{cases}$$

则显然有

$$\rho_1(g(x), g(y)) = \rho(x, y)$$

故 g 是 $[0, 1] \rightarrow R^1$ 上的等距映射, 从而 $[0, 1]$ 与 R^1 同胚。

24. 在数轴上添加一个无穷远点 ∞ , 得到的集记为 R'' , 试在 R'' 中适当定义距离, 使 R'' 平面与 R^2 上的单位圆周同胚 (单位圆周的距离与 R^2 同)

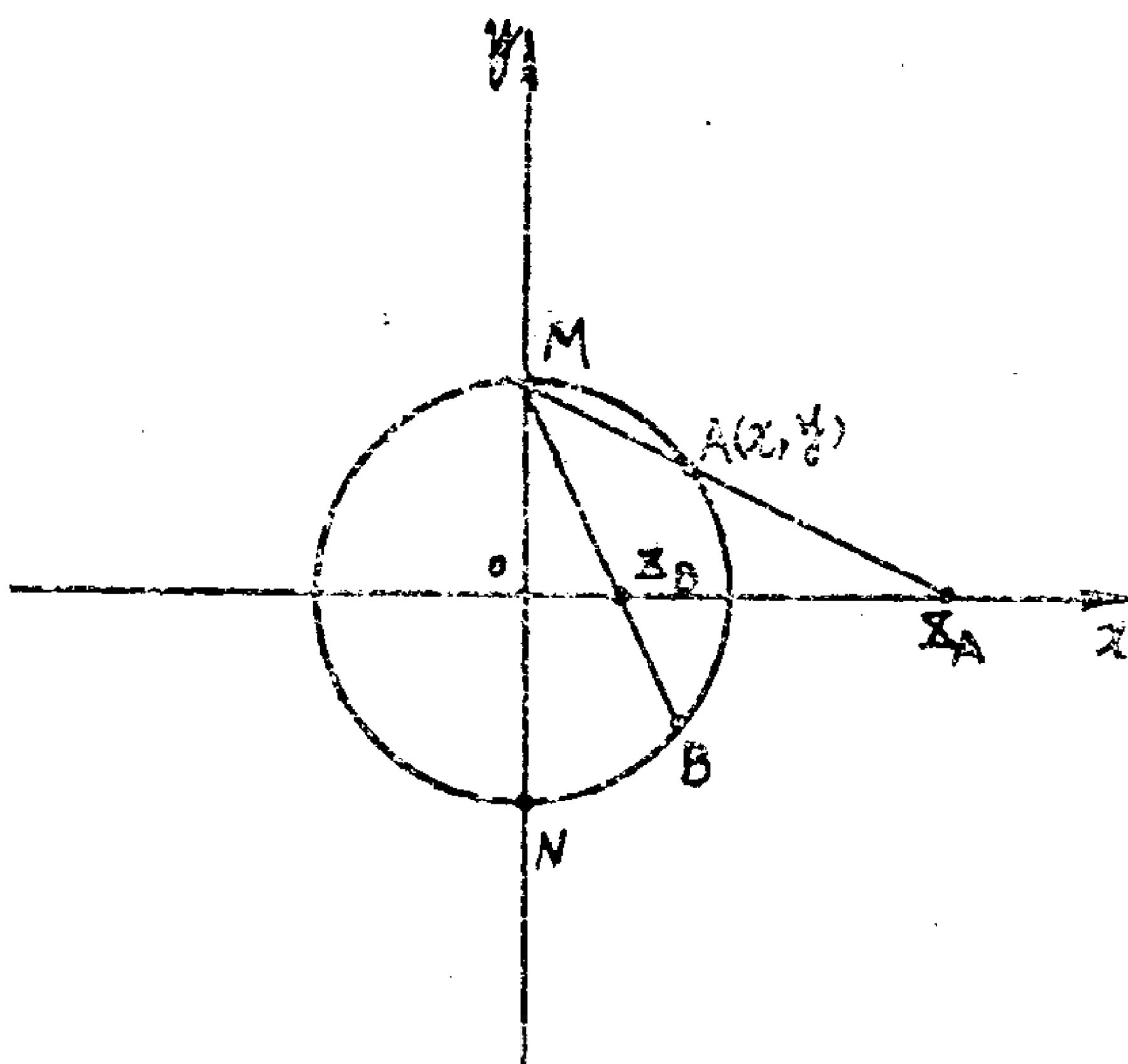
解 如图所示, 作映射 T :

$$C_1 (\text{单位圆周}) \rightarrow R'', M \longleftrightarrow \infty, N \longleftrightarrow 0$$

$$A(x, y) \longleftrightarrow X_A = \frac{x}{1-y} \quad (y \neq 1 \text{ 时})$$

即

$$T(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{1-y} & (y \neq 1 \text{ 时}) \\ \infty & (y = 1 \text{ 时}) \end{cases}$$



且

$$T^{-1}: \quad y = \frac{X^2 - 1}{1 + X^2}$$

$$x = \begin{cases} \sqrt{1 - y^2} & (X \geq 0) \\ -\sqrt{1 - y^2} & (X < 0) \end{cases}$$

我们用 $\rho(A, B)$ 表示 C_1 中的距离, 并且令

$$\rho_1(X_A, X_B) = \rho(T^{-1}X_A, T^{-1}X_B) = \rho(A, B)$$

其中 $X_A, X_B \in R''$, 易知 T 是 $C_1 \rightarrow R''$ 上的等距映射, 故 C_1 与 R'' 同胚。

25. 设 $f(t) \in C[0, 1]$, 求出方程

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_0^t x(s) ds \quad (t \in [0, 1])$$

的连续解。

解法一 据参考文献[2] p45 例3 知方程对一切 λ 存在

唯一解 $x(t) \in C[0, 1]$, 改写为原方程为

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 K(t, s)x(s)ds = (Kx)(t)$$

其中

$$K(t, s) = \begin{cases} 0 & t < s \\ 1 & t \geq s \end{cases}$$

由逐次逼近法, 取 $x_0(t) \equiv 0$, 得

$$x_1 = Kx_0, \quad x_2 = K^2x_0, \quad \dots, \quad x_n = K^n x_0$$

则

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) \quad (C[0, 1] \text{ 中收敛})$$

即为原方程之解。容易算出

$$x_1(t) = f(t), \quad x_2(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 K(t, s)f(s)ds, \dots,$$

$$x_{n+1}(t) = f(t) + \sum_{k=1}^n \lambda^k \int_0^1 K_k(t, s)f(s)ds$$

其中 $K_1(t, s) = K(t, s)$,

$$K_n(t, s) = \int_0^1 K(t, u)K_{n-1}(u, s)ds \quad (n \geq 2)$$

从而

$$K_n(t, s) = \begin{cases} 0 & t < s \\ \frac{1}{(n-1)!} (t-s)^{n-1} & t \geq s \end{cases}$$

$$x_{n+1}(t) = f(t) + \lambda \int_0^t \left[1 + \lambda(t-s) + \frac{\lambda^2(t-s)^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^{n-1}(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \right] f(s)ds$$

故

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}(t) = f(t) + \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)ds$$

解法二 令

$$y(t) = \int_0^t x(s) ds$$

则 $y'(t) = x(t)$, 如果 $x(t)$ 满足原方程, 则 $y(t)$ 必满足方程:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t) + \lambda y(t) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

易知方程(1)的解为

$$\overline{y}(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds \quad (2)$$

再令

$$\overline{x}(t) = f(t) + \lambda \overline{y}(t) = f(t) + \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds \quad (3)$$

下面证明 $\overline{x}(t)$ 为原方程之解。事实上, 因为 $y(t)$ 满足(1), 则

$$\overline{y}'(t) = f(t) + \lambda \overline{y}(t) = \overline{x}(t)$$

所以

$$\overline{y}(t) = \int_0^t \overline{x}(s) ds$$

由(3)知

$$\overline{x}(t) = f(t) + \lambda \int_0^t \overline{x}(s) ds$$

故 $\overline{x}(t) = f(t) + \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds$ 为原方程的连续解。

26. 设 T 为完备距离空间 X 到 X 的映射, 如果

$$\alpha_0 = \inf_n \sup_{x \neq y} \frac{\rho(T^n x, T^n y)}{\rho(x, y)} < 1$$

则 T 存在唯一的不动点。

证 令

$$\alpha_n = \sup_{x \neq y} \frac{\rho(T^n x, T^n y)}{\rho(x, y)}$$

则

$$\alpha_0 = \inf_n \alpha_n < 1$$

故存在 n_0 使 $0 \leq \alpha_{n_0} < 1$, 令 $\theta = \alpha_{n_0}$, 我们就有

$$\rho(T^{n_0} x, T^{n_0} y) \leq \theta \rho(x, y) \quad (\forall x, y \in X)$$

据参考文献[2]定理3.2(p44), T 必存在唯一不动点。

27. 设 X 是距离空间, 证明不等式

$$|\rho(x, z) - \rho(z, y)| \leq \rho(x, y)$$

其中 $x, y, z \in X$.

28. 设 F_1, F_2 是距离空间 X 中的集合, 其中一个 是紧集, 另一个是闭集, 试证明: 若 $\rho(F_1, F_2) = 0$ 则存在 $x_0 \in F_1 \cap F_2$.

证 因为 $\rho(F_1, F_2) = \inf_{x \in F_1, y \in F_2} \rho(x, y) = 0$, 则存在 $x_n \in F_1, y_n \in F_2$, 使

$$\rho(x_n, y_n) \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

设 F_1 为紧集, F_2 为闭集, 由于 $\{x_n\} \subset F_1$, 则存在子序列 $x_{n_k} \longrightarrow x_0 \in F_1$ ($k \longrightarrow \infty$), 但

$$\rho(y_{n_k}, x_0) \leq \rho(y_{n_k}, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0)$$

故 $y_{n_k} \longrightarrow x_0 \in F_2$, 即 $x_0 \in F_1 \cap F_2$.

29. 如果在参考文献[2]定理3.1中 $\theta = 1$, 不等式(3) 为严格不等式, 举例说明定理的结论可以不真。

解 令 $X = [0, +\infty)$, $Tx = x + \frac{1}{1+x}$ ($x \in [0, +\infty)$),

我们容易证明对一切 $x, y \in [0, +\infty)$, $x \neq y$ 时, 有

$$|Tx - Ty| < |x - y|$$

但 T 在 $[0, \infty)$ 中没有不动点。

30. 在线性拓扑空间 E 中, 问下列叙述是否成立:

(i) 设 $A \subset E$ 为闭集, 则 $x + A$, αA 也是闭集;

(ii) E 的子空间的闭包也是子空间。

31. 设 A 是线性拓扑空间 E 中的凸集, $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, 则对于任何 $x \in \overset{\circ}{A}$, $y \in A$ 以及 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \overset{\circ}{A}$.

证 因为 $x \in \overset{\circ}{A}$, 则存在 x 的一个邻域 $U_\bullet = U_0 + x$, 使 $U_\bullet \subset A$. 不妨设 U_0 是 0 点的均衡环境, 于是 $\alpha U_\bullet = \alpha U_0 + \alpha x$ 是 αx 的一个邻域. 显然

$$\alpha U_\bullet + (1 - \alpha)y \subset A$$

因为 $\alpha U_\bullet + (1 - \alpha)y$ 是 $\alpha x + (1 - \alpha)y$ 的一个邻域, 故

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in \overset{\circ}{A}$$

32. 设 X 为全有界距离空间, 证明对任意的 $\varepsilon > 0$ 以及任一无穷子集 $M \subset X$ 中, 存在一个无穷子集 M_0 , 使得 M_0 的直径 $< \varepsilon$.

33. 设 $f(x)$, $f_n(x)$ 在紧空间 E 上连续, $f_n(x)$ 处处收敛于 $f(x)$, $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ (对每个 $x \in E$, $n = 1, 2, \dots$), 证明 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

提示 任给 $\varepsilon > 0$, 考察集合

$$G_n = \{x \in E: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$$

证明 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, 并利用紧空间特征。

34. 设 F 为距离空间 (X, P) 中的紧集, T 为 F 到 F 中的映像, 满足条件: 对一切 $x, y \in F$, $x \neq y$,

$$\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y)$$

则 T 在 F 中存在唯一不动点。

提示 令 $\phi(x) = \rho(Tx, x)$, 证明 ϕ 是定义在 F 上的连续函数, 利用紧集上连续函数的性质求出不动点。

35. 设 $V[a, b]$ 表在 $[a, b]$ 上圆变、右连续函数的全体, 其线性运算与 $C[a, b]$ 中的相同, 在 $V[a, b]$ 中定义范数

$$\|x\| = |x(a)| + \int_a^b V(x)$$

则 $V[a, b]$ 是一个巴拿赫空间。

证 $V[a, b]$ 为线性空间显然, 今证 $\|\cdot\|$ 满足范数公理。 $\|x\| \geq 0$ 及 $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ 显然成立, $\|x\| = 0$ 等价于

$x(a) = 0$, 且 $\int_a^b V(x) = 0$ 也等价于对任一分划 $\Delta: a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$, 成立

$$\begin{cases} x(a) = 0 \\ \sum_{i=1}^k |x(t_i) - x(t_{i-1})| = 0 \end{cases}$$

也等价于 $x(t) \equiv 0$,

$$\begin{aligned} \|x + y\| &\leq |x(a)| + |y(a)| + \int_a^b V(x) + \int_a^b V(y) \\ &= \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

最后证明 $V[a, b]$ 的完备性:

$$\rho(x, y) = |x(a) - y(a)| + \int_a^b V(x - y)$$

设 $\{x_n(t)\}$ 是 $V[a, b]$ 中任一基本列, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N ,

当 $n, m > N$ 时, 有

$$\rho(x_m, x_n) = |x_m(a) - x_n(a)| + \int_a^b (x_m - x_n) < \varepsilon$$

容易证明 $x_n(t)$ 必一致收敛。记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)$, 只要证明

$x(t) \in V[a, b]$, 且 $\|x_n - x\| \longrightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 。

(i) $x(t)$ 的右连续性: 设 $\Delta t > 0$, 因为

$$\begin{aligned} |x(t) - x(t + \Delta t)| &\leq |x(t) - x_n(t)| \\ &+ |x_n(t) - x_n(t + \Delta t)| + |x_n(t + \Delta t) - x(t + \Delta t)| \end{aligned}$$

因而利用 $x_n(t)$ 一致收敛于 $x(t)$ 以及 $x_n(t)$ 的右连续性, 立即得 $x(t)$ 的右连续性。

(ii) $\int_a^b (x) < +\infty$ 以及 $\|x_n - x\| \longrightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$: 因为

$x_n(t)$ 是 $V[a, b]$ 中基本列, 所以对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $n, m \geq N$ 时, 有

$$\begin{aligned} |x_m(a) - x_n(a)| + \sum_{i=1}^k |x_m(t_i) - x_n(t_i) - x_m(t_{i-1}) + \\ + x_n(t_{i-1})| \leq \|x_n - x_m\| < \varepsilon \end{aligned}$$

对一切分划 Δ 成立。上式中固定 $n \geq N$, 令 $m \longrightarrow \infty$, 得

$$\begin{aligned} |x(a) - x_n(a)| + \sum_{i=1}^k |x(t_i) - x_n(t_i) - x(t_{i-1}) \\ + x_n(t_{i-1})| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

故当 $n \geq N$ 时有 $\|x - x_n\| \leq \varepsilon$, 这就证明了 $x(t) \in V[a, b]$ 以及 $\rho(x_n, x) \longrightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 。

36. 设 M_0 是 $[a, b]$ 上有界函数的全体, 线性运算的定义与 $C[a, b]$ 中的相同, 在 M_0 中定义范数

$$\|x\| = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

求证 M_0 是 Banach 空间。

证 \parallel 满足范数公理显然，我们仅证明完备性。设 $\{x_n(t)\}$ 是 M_0 中任一基本列，则对任给的 $\varepsilon > 0$ ，存在 N ，当 $m, n > N$ 时，有

$$\sup_{t \in [a, b]} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon$$

故 $x_n(t)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于某一函数 $x(t)$ 。又因为

$$|x(t)| \leq |x(t) - x_n(t)| + |x_n(t)|$$

所以 $x(t) \in M_0$ ，最后据 M_0 中收敛与一致收敛等价可得

$$\|x_n - x\| \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

故 M_0 是 Banach 空间。

37. 设 H^P ($0 < P \leq 1$) 表示 $[a, b]$ 上满足霍尔得条件

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq M |t_1 - t_2|^P$$

的函数全体，线性运算的定义与 $C[a, b]$ 中的相同，在 H^P 中定义范数

$$\|x\| = |x(a)| + \sup_{a \leq t_1 < t_2 \leq b} \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^P}$$

求证 H^P 为 Banach 空间。

证 我们仅证明 H^P 的完备性，设 $\{x_n(t)\}$ 为 H^P 中任一基本列，则对任给的 $\varepsilon > 0$ ，存在 N ，当 $n, m > N$ 时，有

$$|x_n(a) - x_m(a)| + \sup_{a \leq t_1 < t_2 \leq b} \frac{|x_n(t_1) - x_m(t_1) - x_n(t_2) + x_m(t_2)|}{|t_1 - t_2|^P} < \varepsilon$$

由此可得 $x_n(t)$ 在 $[a, b]$ 上处处收敛。记极限函数为 $x(t)$ ，下面证明 $x(t) \in H^P$ ，且 $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ ($n \longrightarrow \infty$)。任取 $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ ，当 $n, m > N$ 时，有

$$|x_n(a) - x_m(a)| + \frac{|x_n(t_1) - x_m(t_1) - x_n(t_2) + x_m(t_2)|}{|t_1 - t_2|^P} \leq |x_n - x_m| < \varepsilon$$

在上式中固定 $n > N$, 令 $m \rightarrow \infty$, 得

$$|x_n(a) - x(a)| + \frac{|x_n(t_1) - x(t_1) - x_n(t_2) + x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^P} \leq \varepsilon$$

从而

$$\frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^P} \leq \varepsilon + |x_n| \quad (n > N)$$

则 $x(t) \in H^P$, 且当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - x| \leq \varepsilon$$

故 $x_n \rightarrow x$, H^P 为 Banach 空间。

38. 设 m 为一切有界数列组成的集, 线性运算与 l^P 中的相同, 在 m 中 ◆

$$|x| = \sup_{n \geq 1} |\xi_n|$$

其中 $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\} \in m$, 则 m 为不可分的 Banach 空间。

证 m 为赋范线性空间显然, 今证完备性。设 $\{x_n\}$ 为 m 中任一基本列, 其中 $x_n = \{\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_i^{(n)}, \dots\}$, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $n, m > N$ 时, 有

$$|x_n - x_m| = \sup_{i \geq 1} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}| < \varepsilon$$

故对每个 i , $\{\xi_i^{(n)}\}$ 是一个收敛数列, 记 $\xi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^{(n)}$,

因为对每个 i , 当 $n, m > N$ 时, 有

$$\left| \xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)} \right| < \varepsilon$$

固定 $n > N$, 令 $m \rightarrow \infty$, 则得

$$\left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right| \leq \varepsilon \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n > N)$$

所以 $\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, 且 $x = (\xi_i) \in m$.

下面证明 m 是不可分的。记

$$K = \{(\xi_i) \mid \xi_i = 0 \text{ 或 } 1\}$$

易知 K 不可列, 其势为 \aleph_s , 且 $x, y \in K, x \neq y$ 时, $\|x - y\| = 1$.

若 m 可分, 则存在可列子集 $\{y_k\}$ 在 m 中稠密, 我们以 K 中之点为中心, $\frac{1}{3}$ 为半径作开球, 这种开球所成的类的势为 \aleph_s .

由于 $\overline{\{y_k\}} = m$, 则每个球中都含有 $\{y_k\}$ 中之点, 从而至少有一个 y_i 同属于两个不同的开球, 例如同属于 $S(x, \frac{1}{3}), S(y, \frac{1}{3})$, 其中 $x, y \in K, x \neq y$, 则

$$1 = \rho(x, y) \leq \rho(x, y_i) + \rho(y_i, y) \leq \frac{2}{3}$$

矛盾, 故 m 为不分的 Banach 空间。

39. 设 C 为一切收敛数列组成的集, 线性运算与 l^p 中的相同, 在 C 中令

$$\|x\| = \sup_{n \geq 1} |\xi_n|$$

其中 $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\} \in C$, 则 C 为可分的 Banach 空间。

证 完备性: 设 $\{x_n\}$ 为 C 中任一基本列, 其中 $x_n = \{\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_i^{(n)}, \dots\}$, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $n, m > N$ 时, 有

$$\left| \xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)} \right| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (*)$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^{(n)}$ 存在, 记 $\xi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^{(n)}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), 因为

$$\left| \xi_{i+p} - \xi_i \right| = \left| \xi_{i+p} - \xi_{i+p}^{(n)} \right| + \left| \xi_{i+p}^{(n)} - \xi_i^{(n)} \right| + \left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right|$$

由此立即可知 $\lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i$ 存在, 故 $x = (\xi_i) \in C$. 又若在(*)

中固定 $n > N$, 令 $m \rightarrow \infty$, 则得

$$\left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right| \leq \varepsilon \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n > N)$$

所以 $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 空间 C 的完备性特征得证。

可分性: 记 $E_0 = \{(r_1, r_2, \dots, r_n, r, r, \dots) \mid n \text{ 为任一自然数, } r_i, r \text{ 均为有理数}\}$, 则 $E_0 \subset C$, 且可列. 下面证明 E_0 在 C 中稠. 任取 $x = (\xi_n) \in C$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi$$

故存在 N 及有理数 r , 使 $n > N$ 时, 有

$$|\xi_n - r| < \varepsilon$$

对于 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, 必存在有理数 r_1, r_2, \dots, r_N , 使

$$|\xi_i - r_i| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

令 $y = (r_1, r_2, \dots, r_N, r, r, \dots)$, 则 $y \in E_0$, 且

$$\rho(x, y) < \varepsilon$$

由于 ε 是任意的, 故 E_0 在 C 中稠密, 所以 C 是可分的 Banach 空间。

40. 设 C_0 为一切收敛于零的数列组成的集, 线性运算与 l^p 中的相同, 在 C_0 中令

$$\|x\| = \sup_{n \geq 1} |\xi_n|$$

其中 $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\} \in C_0$, 则 C_0 为可分的

Banach空间。

提示 方法同本章第39题，对于可分性，只需取

$$E_0 = \{(r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, \dots)\}$$

n 为任一自然数， r_i 为有理数 ($i = 1, 2, \dots, n$) }

然后证明 E_0 在 C_0 中稠密。

41. 用 $\mathcal{L}^2(-\infty, +\infty)$ 表示定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的可测函数，且满足

$$\|x\|^2 = \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt < \infty \quad (1)$$

的实值函数全体，证明 $\mathcal{L}^2(-\infty, +\infty)$ 按(1)定义的范数是一个赋范线性空间(规定 $\mathcal{L}^2(+\infty, -\infty)$ 中的零元为满足

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = 0 \text{ 的元素}).$$

42. 用 $C_0(-\infty, +\infty)$ 表示定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上且在某个有限区间之外为零的连续函数全体，这里的有限区间将随着函数的不同而不同。问 $C_0(-\infty, +\infty)$ 按范数

$$\|x\| = \sup_{t \in (-\infty, +\infty)} |x(t)|$$

导出的距离是否完备？若不完备，试求出它的完备化空间。

解 我们记

$$\tilde{C}_0 = \{x(t) \in C(-\infty, +\infty); \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0\}$$

$x(t) \in \tilde{C}_0$ 时，规定范数

$$\|x\| = \sup_{t \in (-\infty, +\infty)} |x(t)|$$

可以证明 \tilde{C}_0 是一个完备的赋范线性空间。任取 $x(t) \in \tilde{C}_0$,

$x(t) \in C_0(-\infty, +\infty)$, 若令连续函数 $x_n(t)$ 如下:

$$x_n(x) = \begin{cases} x(t) & t \in [-n, n] \\ 0 & t \in (-\infty, -n - \frac{1}{2}] \cup [n + \frac{1}{2}, +\infty) \\ \text{线性} & t \in [-n - \frac{1}{2}, -n] \cup [n, n + \frac{1}{2}] \end{cases}$$

则 $x_n(t) \in C_0(-\infty, +\infty)$, 且 $\{x_n(t)\}$ 是 $C_0(-\infty, +\infty)$ 中的基本列, 显然 $\|x_n - x\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 但 $x(t) \in C_0(-\infty, +\infty)$

故 $C_0(-\infty, +\infty)$ 不完备, \widetilde{C}_0 是 $C_0(-\infty, +\infty)$ 的完备化空间。

43. 设 E 为 Banach 空间, $A \subset E$ 为闭子集, $B \subset E$ 为紧子集, 证明 $A + B = \{x + y: x \in A, y \in B\}$ 是闭的。

证 设 $x_n + y_n \in A + B$, $x_n + y_n \rightarrow z (n \rightarrow \infty)$, 其中 $x_n \in A$, $y_n \in B$, 因为 B 是紧集, 我们不妨设 $y_n \rightarrow y_0 \in B$, 则

$$x_n = (x_n + y_n) - y_n \rightarrow z - y_0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

令

$$x_0 = z - y_0$$

因为 A 闭, $x_n \in A$, 则 $x_0 \in A$, 于是

$$z = x_0 + y_0 \in A + B$$

这就证明了 $A + B$ 的闭性。

44. 证明空间 S (见参考文献 [2] p18 例 10) 不可赋范, 即在 S 上不可能定义一个范数, 使得由这个范数导出的拓扑与 S 的原拓扑等价。

证 设存在 S 上的一个范数 $\|\cdot\|$, 使 S 由 $\|\cdot\|$ 导出的拓扑与原拓扑等价, 则对 $(S, \|\cdot\|)$ 中的开球 $O = \{x \in S: \|x\| < 1\}$ 必存在邻域 $U_\delta \subset (S, \rho)$, 其中

$$U_\delta = \{x(t) \in S: \rho(x, 0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{|x(t)|}{1 + |x(t)|} dt < \delta\}$$

使得

$$U_\delta \subset O$$

不妨设 $0 < \delta < 1$ 以及 $m([0, \delta] \cap E) > 0$, 我们令

$$x(t) \leq \begin{cases} \frac{1}{t} & t \in [0, \delta] \cap E \\ 0 & t \in E - [0, \delta] \end{cases}$$

因为

$$\begin{aligned} \rho(x, 0) &\leq \int_0^\delta \frac{\frac{1}{t}}{1 + \frac{1}{t}} dt = \int_0^\delta \frac{1}{1+t} dt \\ &= \ln(1+\delta) < \delta \end{aligned}$$

则 $x(t) \in U_\delta$. 又因为对任意的 $\lambda > 1$,

$$\begin{aligned} \rho(\lambda x(t), 0) &\leq \int_0^\delta \frac{\frac{\lambda}{t}}{1 + \frac{\lambda}{t}} dt \\ &= \int_0^\delta \frac{\lambda}{t+\lambda} dt \\ &= \lambda \ln \left(1 + \frac{\delta}{\lambda} \right) \\ &< \delta \end{aligned}$$

故对一切 $\lambda > 1$, $\lambda x(t) \in U_\delta \subset O$, 这是不可能的, 从而 S 不可赋范。

45. 设 X 为赋范线性空间, $X \neq \{0\}$, 证明 X 完备的充分必要条件是单位球面 $S_1 = \{x \in X: \|x\| = 1\}$ 完备。

第五章 线性有界算子

一、基本概念和主要定理

有界线性算子 设 X 和 Y 是赋范线性空间, 映射 $T: \mathcal{D}(T) \subset X \longrightarrow Y$ 是线性映射, 如果存在常数 $M > 0$, 使对一切 $x \in \mathcal{D}(T)$, 有

$$\|Tx\| \leq M\|x\|$$

则称映射 T 为有界线性算子。线性算子 T 的有界性等价于连续性, 也等价于 T 在原点连续。如果 $Y = R$ 或者 $Y = C$, $f \in \mathcal{B}(X, Y)$, 则称 f 为有界线性泛函。 $X \longrightarrow Y$ 有界线性算子全体记作 $\mathcal{B}(X, Y)$, 当 $Y = X$ 时, 简记为 $\mathcal{B}(X)$ 。如果规定 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ 的范数为

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Tx\|$$

则当 Y 完备时, $\mathcal{B}(X, Y)$ 也是一个 Banach 空间。

逆算子 设线性算子 T 是 $(X, \|\cdot\|)$ 到其值域 $R(T)$ 上的一对一映射, 则称 T 是 X 到 $R(T)$ 上的可逆算子。如果线性算子 S 满足 $ST = I_X$ (I_X 为 X 中的恒同算子), 则称 S 为 T 的左逆; 如果线性算子 S' 满足 $TS' = I_Y$ (I_Y 为 Y 中恒同算子), 则称 S' 为 T 的右逆; 如果线性算子 T 的左逆和右逆同时存在, 则 T 必是 $X \longrightarrow Y$ 上的可逆算子, 且 $T^{-1} = S = S'$ 。

$T \in \mathcal{B}(X)$, T^{-1} 是 $R(T) \longrightarrow X$ 的有界线性算子的充要

条件是存在常数 $\alpha > 0$ ，使对一切 $x \in X$ ，有

$$\|Tx\| \geq \alpha \|x\|$$

设 $T \in \mathcal{B}(X)$ ， $\|T\| < 1$ ，则 $(I - T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ ，且

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

上式右边级数在 $\mathcal{B}(X)$ 中收敛。

闭线性算子 设 X, Y 是赋范线性空间， $T: \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$ 是线性算子，若对任何 $x_n \in \mathcal{D}(T)$ ，当 $x_n \rightarrow x$ ， $Tx_n \rightarrow y$ 时，有 $x \in \mathcal{D}(T)$ 以及 $y = Tx$ ，则称 T 为闭线性算子，简称闭算子。 T 是闭算子的充要条件是 T 的图像 $G(T) = \{(x, Tx) : x \in \mathcal{D}(T)\}$ 为 $X \times Y$ 中的闭子空间。

容易证明：(i)如果 T 是闭算子， T^{-1} 存在，则 T^{-1} 也是闭算子；(ii)设 X 完备， T 是闭算子，若 T^{-1} 存在连续，则 T 的值域 $R(T)$ 是闭的。

全连续线性算子 设 X, Y 是赋范线性空间， $T: X \rightarrow Y$ 是线性算子，若 T 将 X 中的任一有界集映为 Y 中的列紧集，则称 T 为全连续线性算子，简称为全连续算子。

设 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ ，若 T 的值域为有穷维空间，则称 T 为有穷秩算子，易知有穷秩算子必为全连续算子。

全连续算子 T 有下列简单性质：

(i)若 x_n 弱收敛于 x_0 ，则 Tx_n 强收敛于 Tx_0 ；

(ii) T 的值域 $R(T)$ 必可分；

(iii)若 T 全连续，则 T^* 也全连续；

(iv)设 Y 完备， $\{T_n\}$ 为 $\mathcal{B}(X, Y)$ 中的全连续算子序列， $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ ，若 T_n 一致收敛于 T （即 $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ ），则 T 也是全连续算子。反之，若 Y 是具有可数基

(Schauder基)的Banach空间,则对任一全连续算子 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, 存在有穷秩算子 T_n 一致收敛于 T .

共轭空间和共轭算子 设 X 为赋范线性空间, X 上的全部有界线性泛函组成的集合记作 X^* , 称 X^* 为 X 的共轭空间, 共轭空间 X^* 一定是Banach空间; X 的二次共轭空间 $X^{**} = (X^*)^*$.

设 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, 定义 $T^* \in \mathcal{B}(Y^*, X^*)$ 如下:

$$T^*f(x) = f(Tx) \quad (\forall f \in Y^*, x \in X)$$

称 T^* 为 T 的共轭算子, 可以证明 $\|T^*\| = \|T\|$.

自然嵌入映射和自反空间 规定映射 $J: X \longrightarrow X^{**}$ 如下, $x \in X$, 令 $F_x \in X^{**}$, $F_x(f) = f(x) (\forall f \in X^*)$, 并记

$$Jx = F_x$$

则称 J 为 $X \longrightarrow X^{**}$ 的自然嵌入映射; 若 $JX = X^{**}$, 则称 X 为自反Banach空间.

一致凸Banach空间 设 X 为Banach空间, 若对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $\|x - y\| \geq \varepsilon$ ($\|x\| = \|y\| = 1$), 就有 $\|x + y\| \leq 2 - \delta$, 则称 X 为一致凸Banach空间. 可以证明 Hilbert空间是一致凸的, 一致凸的Banach空间必是自反Banach空间.

Banach空间中的强收敛和弱收敛 设 $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$, 若 $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 则称 $\{x_n\}$ 强收敛于 x , 简记为 $x_n \xrightarrow{S} x$; 如果对任一 $f \in X^*$, $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$), 则称 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x , 简记为 $x_n \xrightarrow{W} x$; 设 $\{f_n\} \subset X^*$, $f \in X^*$, 如果对任一 $x \in X$, $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$), 则称 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f , 简记为 $f_n \xrightarrow{*W} f$.

Banach空间 X 中点列 $\{x_n\}$ 强收敛于 x ，必可推出 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x ，反之不一定成立。 X^* 中点列 $\{f_n\}$ 强收敛于 f （即 $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ ），必可推出 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f ，反之也不一定成立。

定理 1 (Baire Category) 设 (X, ρ) 是完备距离空间， $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ，则必存在 k_0 ，使 E_{k_0} 在 X 的某个闭球中稠密，即 X 为第二纲集。

定理 2 (Hahn-Banach) 设 G 为赋范线性空间 X 中的子空间， f 是定义在 G 上的有界线性泛函，则存在 $F \in X^*$ ，使 $\|F\| = \|f\|_G$ ， $x \in G$ 时， $f(x) = F(x)$ 。

定理 3 (Banach逆算子定理) 设 X, Y 均为Banach空间， $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ ，若 T 是 $X \rightarrow Y$ 上的一对一映射，则 $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$ 。

定理 4 (开映射定理) 设 X, Y 均是Banach空间， $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ ，若 $TX = Y$ ，则 T 是开映射（即将 X 中开集映成 Y 中的开集）。

定理 5 (闭图象定理) 设 X, Y 均是Banach空间， $T: X \rightarrow Y$ 的闭线性算子，则 T 有界。

定理 6 (共鸣定理) 设 X 为Banach空间， Y 为赋范线性空间， $\{T_\alpha\} \alpha \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ ，若对任一 $x \in X$ ，

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \|T_\alpha x\| < +\infty$$

则必有

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \|T_\alpha\| < +\infty$$

设 X 为线性空间， $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 是定义在 X 上的两个范

数, 若存在正数 K_1, K_2 , 使不等式

$$K_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq K_2 \|x\|_1$$

对一切 $x \in X$ 成立, 则称 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价。利用 Banach 逆算子定理可以证明:

如果线性空间 X 上的两个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$, 均使 X 成为 Banach 空间, 且不等式

$$\|x\|_2 \leq K \|x\|_1$$

对一切 $x \in X$ 成立, 其中 K 为常数, 则 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价。

有界线性算子的谱和正则集 设 X 为复 Banach 空间, $T \in \mathcal{B}(X)$, 则称

$$\rho(T) = \{\lambda \in C: (\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)\}$$

为算子 T 的正则集; 称正则集 $\rho(T)$ 的补集

$$\sigma(T) = C \setminus \rho(T)$$

为算子 T 的谱集; $\lambda \in \rho(T)$ 时, $R(\lambda; T) = (\lambda I - T)^{-1}$ 称作 T 的预解式。 $\sigma(T)$ 是复平面 C 上的有界闭集, $R(\lambda; T)$ 是开集 $\rho(T)$ 上的解析函数。

称

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T): (\lambda I - T)x = 0 \text{ 有非零解}\}$$

为算子 T 的点谱, $\lambda \in \sigma_p(T)$ 为 T 的特征值;

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \sigma(T): (\lambda I - T)x = 0 \text{ 只有零解,} \\ (\lambda I - T) \text{ 的值域在 } X \text{ 中稠密}\}$$

为算子 T 的连续谱;

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \sigma(T): (\lambda I - T)x = 0 \text{ 只有零解,} \\ (\lambda I - T) \text{ 的值域在 } X \text{ 中不稠密}\}$$

为算子 T 的剩余谱。易知

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$$

全连续算子T的 Riesz-Schauder 理论 设 $T \in \mathcal{B}(X)$ 是全连续算子, 则

(i) X 为无穷维时, $0 \in \sigma(T)$; $\sigma(T)$ 或者是有限集, 或者是仅以0为聚点的可列集;

(ii) $\lambda \neq 0$ 时, 或者 $\lambda \in \rho(T)$, 或者 $\lambda \in \sigma_p(T)$, 且 $\lambda \in \sigma_p(T)$ 。 $\lambda \neq 0$ 时, λ 所对应的特征向量空间是有穷维的;

(iii) $\sigma(T) = \sigma(T^*)$, 且 $\lambda \neq 0, \lambda \in \sigma_p(T) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma_p(T^*)$;

(iv) 设 $\lambda \neq \mu, \lambda \in \sigma_p(T), \mu \in \sigma_p(T^*), L_\lambda, L_\mu^*$ 分别为 T 和 T^* 相应于 λ, μ 的特征向量空间, 则 $L_\lambda \perp L_\mu^*$;

(v) $\lambda \in \sigma_p(T), \lambda \neq 0$ 时, 有

$$\dim L_\lambda = \dim L_\lambda^*$$

这里 $\dim L_\lambda$ 表示特征向量空间 L_λ 的维数。

二、例题、习题与解法

1. 设无穷阵 (a_{ij}) ($i, j = 1, 2, 3, \dots$)满足

$$\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < +\infty$$

则 $y = Tx$: $\eta_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j$, 其中 $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}$,
 $y = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots\}$, 是由 m 到 m 中的有界线性算子,
 且

$$\|T\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$$

证 T 是线性算子显然。因为

$$\begin{aligned}\|y\| &= \sup_i |\eta_i| = \sup_i \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j \right| \\ &\leq \left(\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \right) \cdot \|x\|\end{aligned}$$

所以

$$\|T\| \leq \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \quad (1)$$

另一方面, 令

$$x_i = \{\operatorname{sgn} a_{i1}, \operatorname{sgn} a_{i2}, \dots, \operatorname{sgn} a_{in}, \dots\}$$

则 $x_i \in m$, $\|x_i\| \leq 1$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), 而

$$Tx_i = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j} \operatorname{sgn} a_{ij}, \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} \operatorname{sgn} a_{ij}, \dots \right\}$$

$$\begin{aligned}\|T\| \geq \|Tx_i\| &\geq \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \operatorname{sgn} a_{ij} \right| = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \\ &\quad (i = 1, 2, 3, \dots)\end{aligned}$$

故

$$\|T\| \geq \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \quad (2)$$

由 (1), (2) 立即得

$$\|T\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$$

2. 对于怎样的函数 $a(t)$, 算子 $Tx(t) = a(t)x(t)$ 在 $C[a, b]$ 中是连续的? 如果它是连续的, 试求它的范数。

解 当 $a(t) \in C[a, b]$ 时, $Tx(t) = a(t)x(t)$ 是 $C[a, b]$ 中的有界线性算子。显然有 $\|T\| = \max_{t \in [a, b]} |a(t)|$ 。

3. 对于怎样的函数 $a(t)$, 算子 $Tx(t) = a(t)x(t)$ 在 $L^2[a, b]$ 中连续? 如果它是连续的, 试求它的范数。

解 $a(t) \in L^\infty[a, b]$ 时, $Tx(t) = a(t)x(t)$ 是 $L^2[a, b]$ 中的有界线性算子, 显然

$$\|T\| \leq \|a(t)\|_\infty = \alpha$$

因为

$$\alpha = \text{varisup}_{a \leq t \leq b} |a(t)|$$

任给 $\varepsilon > 0$, 令

$$E = \{t \in [a, b]: |a(t)| \geq \alpha - \varepsilon\}$$

则 $mE > 0$, 我们取 $x(t) \in L^2[a, b]$ 如下:

$$x(t) = \begin{cases} \text{sgn} a(t) / (mE)^{\frac{1}{2}} & t \in E \\ 0 & t \in [a, b] - E \end{cases}$$

则 $\|x(t)\| = 1$, 且

$$\|T\| \geq \|Tx\| = \left\{ \int_E \frac{|a(t)|^2}{mE} dt \right\}^{\frac{1}{2}} \geq \alpha - \varepsilon$$

因为 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 故 $\|T\| \geq \alpha$, 从而

$$\|T\| = \text{varisup}_{t \in [a, b]} |a(t)|$$

4. 设 $K(t, s)$ 是 $a \leq t \leq b, a \leq s \leq b$ 上的可测函数, 且 $\int_a^b |K(t, s)| dt$ 对 $[a, b]$ 上几乎所有的 s 存在, 且作为 s 的函数是本性有界的, 令

$$y = Tx: y(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

则 T 是 $L[a, b]$ 到其自身的有界线性算子, 且

$$\|T\| = \operatorname{vari} \sup_{a \leq s \leq b} \int_a^b |K(t, s)| dt$$

证 不妨设 $K(t, s)$ 为实函数, 令

$$\alpha = \operatorname{vari} \sup_{a \leq s \leq b} \int_a^b |K(t, s)| dt$$

T 显然是 $L[a, b] \rightarrow L[a, b]$ 中的有界线性算子, 且 $\|T\| \leq \alpha$.

为了证明 $\|T\| \geq \alpha$, 我们考察共轭算子 T^* :

$$(T^*x)(s) = \int_a^b K(t, s)x(t)dt \quad (x(t) \in L^\infty[a, b])$$

T^* 是 $L^\infty[a, b] \rightarrow L^\infty[a, b]$ 中的有界线性算子, 且 $\|T\| = \|T^*\|$, 故只要证明 $\|T^*\| \geq \alpha$. 任取 $\varepsilon > 0$, 令

$$E = \left\{ s \in [a, b] \mid \int_a^b |K(t, s)| dt > \alpha - \varepsilon \right\}$$

则 $mE > 0$. 因为 $\int_a^b |K(t, s)| dt$ 关于 s 本性有界, 所以

$$\int_a^b \int_a^b |K(t, s)| dt ds < +\infty$$

根据积分的性质, 必存在连续函数 $K_n(t, s)$, 使

$$\int_a^b \int_a^b |K_n(t, s) - K(t, s)| dt ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

从而可得

$$\int_a^b |K_n(t, s) - K(t, s)| dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{mes}} 0$$

由Riesz定理, 存在子序列 n_k , 使上式对 $n = n_k$ 几乎处处收敛于0。为简单起见, 不妨设 $\int_a^b |K_n(t, s) - K(t, s)| dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.e.} 0$, 再据叶果洛夫定理, 存在闭集 $F \subset E$, 使 $mF > 0$, 以及

$$\int_a^b |K_n(t, s) - K(t, s)| dt \xrightarrow[\text{在 } F \text{ 上}]{\text{一致}} 0 \quad (1)$$

因为 $mF > 0$, 则必存在 $s_0 \in F$, 使对 s_0 的一切邻域 $U(s_0)$ 有

$$m(U(s_0) \cap F) > 0$$

又因为 $s_0 \in F \subset E$, 故

$$\int_a^b |K(t, s_0)| dt > \alpha - \varepsilon \quad (2)$$

由(1)可知存在邻域 $U(s_0)$ 及自然数 N , 使对一切 $s \in U(s_0) \cap F$ 成立

$$\begin{aligned} \int_a^b |K(t, s) - K(t, s_0)| dt &\leq \int_a^b |K(t, s) \\ &- K_N(t, s)| dt + \int_a^b |K_N(t, s) - K_N(t, s_0)| dt \\ &+ \int_a^b |K_N(t, s_0) - K(t, s_0)| dt < \varepsilon \end{aligned} \quad (3)$$

现取 $\varphi(t) = \operatorname{sgn} K(t, s_0) \in L^\infty[a, b]$, $\|\varphi\|_\infty = 1$, $\varphi(t)$ 显然可测, 则由(3)得

$$\left| \int_a^b K(t, s) \varphi(t) dt - \int_a^b K(t, s_0) \varphi(t) dt \right| < \varepsilon$$

($\forall s \in U(s_0) \cap F$)

从而当 $s \in U(s_0) \cap F$ 时, 有

$$\left| \int_a^b K(t, s_0) \varphi(t) dt \right| - \left| \int_a^b K(t, s) \varphi(t) dt \right| < \varepsilon$$

则 $s \in U(s_0) \cap F$ 时, 成立

$$\left| \int_a^b K(t, s) \varphi(t) dt \right| \geq \int_a^b |K(t, s_0)| dt - \varepsilon > \alpha - 2\varepsilon$$

故

$$\|T^*\| \geq \varlimsup_{a \leq s \leq b} \left| \int_a^b K(t, s) \varphi(t) dt \right| \geq \alpha - 2\varepsilon$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 所以 $\|T^*\| = \|T\| \geq \alpha$, 从而 $\|T\| = \alpha$.

5. 设 $\sup_{n \geq 1} |\alpha_n| < +\infty$, 在 l 中定义线性算子:

$$y = Tx: \eta_n = \alpha_n \xi_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

其中 $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}$, $y = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots\}$, 则 T 是有界线性算子, 且

$$\|T\| = \sup_{n \geq 1} |\alpha_n|$$

证 因为 $\|Tx\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n \xi_n| \leq \sup_{n \geq 1} |\alpha_n| \cdot \|x\|$, 所以

$$\|T\| \leq \sup_{n \geq 1} |\alpha_n|$$

另一方面, 取 $e_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ 位}}, 1, 0, \dots) \in l$, $\|e_n\| = 1$,

则

$$\|T\| \geq \|Te_n\| = |\alpha_n| \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

所以

$$\|T\| \geq \sup_{n=1} |\alpha_n|$$

故 $\|T\| = \sup_{n \geq 1} |\alpha_n|$.

6. 证明上题中的 T 存在有界逆算子的充要条件是

$$\inf_{n \geq 1} |\alpha_n| > 0$$

证 充分性: 令 $Sy = (\frac{1}{\alpha_n} \eta_n)$, 其中 $y = (\eta_n)$, 则易知

$ST = TS = I$, 所以 $T^{-1} = S$, 据第 5 题, $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{\inf_{n \geq 1} |\alpha_n|}$,

故 T^{-1} 有界。

必要性：若 T^{-1} 存在有界，则存在 $\alpha > 0$ ，使

$$\|Tx\| \geq \alpha \|x\| \quad (\forall x)$$

由此易证对一切 n 有

$$|\alpha_n| \geq \alpha$$

故 $\inf_{n \geq 1} |\alpha_n| > 0$ 。

7. 设 E 为 Banach 空间， T 为从 E 到 E 中的有界线性算子，设 $\lambda, \mu \in \rho(T)$ ，则 $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu$ （第一预解算子方程）。

证 因为 $R_\lambda - R_\mu = (\lambda - T)^{-1} - (\mu - T)^{-1} = (\lambda - T)^{-1} \cdot [(\mu - T) - (\lambda - T)](\mu - T)^{-1}$ ，所以 $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) \cdot R_\lambda R_\mu$ 。

或者由 $(R_\lambda - R_\mu)(\mu - T)(\lambda - T) = (\mu - T) - (\lambda - T) = \mu - \lambda$ ，得到

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu$$

8. 设 E 为 Banach 空间， T_1, T_2 均为 E 到 E 中的有界线性算子，且可换，设 $\lambda \in \rho(T_1) \cap \rho(T_2)$ ，则 $R_\lambda(T_1) - R_\lambda(T_2) = (T_1 - T_2)R_\lambda(T_1)R_\lambda(T_2)$ （第二预解算子方程），其中 $R_\lambda(T_j)$ ($j = 1, 2$) 是 T_j 的预解式。

证 $R_\lambda(T_1) - R_\lambda(T_2) = (\lambda - T_1)^{-1} [(\lambda - T_2) - (\lambda - T_1)](\lambda - T_2)^{-1}$ ，由条件 $T_1 T_2 = T_2 T_1$ 可得 $T_2 R_\lambda(T_1) = R_\lambda(T_1) T_2$ 。又 $T_1 R_\lambda(T_1) = R_\lambda(T_1) T_1$ 显然成立，故

$$R_\lambda(T_1) - R_\lambda(T_2) = (T_1 - T_2)R_\lambda(T_1)R_\lambda(T_2)$$

或者由 $[R_\lambda(T_1) - R_\lambda(T_2)](\lambda - T_2)(\lambda - T_1) = (\lambda - T_2) - (\lambda - T_1) = T_1 - T_2$

立即可得

$$R_\lambda(T_1) - R_\lambda(T_2) = (T_1 - T_2)R_\lambda(T_1)R_\lambda(T_2)$$

9. 承本章7题, 证明 $\frac{d^n}{d\lambda^n} R_\lambda = (-1)^n n! R_\lambda^{n+1}$

证 已知 $\frac{d}{d\lambda} R_\lambda = -R_\lambda^2$, 用归纳法, 设对 $n-1$ 成立,

即

$$\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R_\lambda = (-1)^{n-1} (n-1)! R_\lambda^n$$

则

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{d\lambda^n} R_\lambda &= (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{d}{d\lambda} R_\lambda^n \\ &= (-1)^{n-1} (n-1)! n R_\lambda^{n-1} (-R_\lambda^2) \\ &= (-1)^n n! R_\lambda^{n+1} \end{aligned}$$

10. 设 E 是 Banach 空间, T_λ 是定义在复平面的某一非空集 G 上而在 $\mathcal{B}(E)$ 中取值的抽象函数, 适合 $T_\lambda - T_\mu = (\mu - \lambda) T_\lambda T_\mu$, 又设对 G 中的某个 λ , T_λ^{-1} 存在有界, 则 T_μ^{-1} 对一切 $\mu \in G$ 都存在且有界, 而且存在 E 中的有界线性算子 T , 使 T_μ 是 T 的预解式, $\rho(T) \supset G$.

证 设 $\mu \in G$, 则

$$T_\lambda = T_\mu + (\mu - \lambda) T_\lambda T_\mu$$

两边左乘 T_λ^{-1} 便得

$$[T_\lambda^{-1} + (\mu - \lambda) I] T_\mu = I$$

同理由 $T_\mu - T_\lambda = (\lambda - \mu) T_\mu T_\lambda$ 可得

$$T_\lambda = T_\mu + (\mu - \lambda) T_\mu T_\lambda$$

两边右乘 T_λ^{-1} , 则得

$$T_{\mu} [T_{\lambda}^{-1} + (\mu - \lambda)I] = I$$

所以

$$T_{\mu}^{-1} = T_{\lambda}^{-1} + (\mu - \lambda)I$$

T_{μ}^{-1} 存在有界。又若令 $T = \lambda I - T_{\lambda}^{-1} \in \mathcal{B}(E)$, 则

$$R_{\mu}(T) = (\mu I - T)^{-1} = [(\mu - \lambda)I + T_{\lambda}^{-1}]^{-1} = T_{\mu}$$

故 $\rho(T) \supset G$.

11. 设 F 是复平面上一有界无穷闭集, $\{\alpha_n\} (n=1, 2, 3, \dots)$ 为 F 的一个稠密子集, 在 l 中定义算子 T 如下:

$$Tx = y: x = \{\xi_n\}, y = \{\alpha_n \xi_n\}$$

则每个 α_n 是 T 的特征值, $\sigma(T) = F$, $F - \{\alpha_n\}$ 中的每个点属于 T 的连续谱。

证 (i) $\lambda = \alpha_n$ 时, 取

$$x_n = \underbrace{\{0, \dots, 0, \xi_n, 0, \dots\}}_{n \text{ 位}} \in l$$

则

$$(\alpha_n I - T)x_n = 0$$

故每个 α_n 是 T 的特征值。

(ii) $\lambda \in \overline{F}$ 时, $\inf_{n \geq 1} |\lambda - \alpha_n| = \alpha > 0$, 记 $T_{\lambda} = \lambda I - T$, $y =$

$T_{\lambda}x: \eta_n = (\lambda - \alpha_n)\xi_n$, 则 T_{λ}^{-1} 存在有界, 且显然有 T_{λ} 的值域 $R(T_{\lambda}) = l$, 所以 $\lambda \in \rho(T)$. 又因为 $\sigma(T)$ 为闭集, 所以

$$\sigma(T) = \overline{\{\alpha_n\}} = F.$$

(iii) $\lambda \in F - \{\alpha_n\}$ 时, 由 $(\lambda - T)x = 0$, 显然可得 $x = 0$, 故 $(\lambda - T)^{-1}$ 存在, 但由于 $\inf_{n \geq 1} |\lambda - \alpha_n| = 0$, 据 6 题得

T_λ^{-1} 无界。下面证明 $\overline{R(T_\lambda)} = l$ 。令

$$E = \{(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m, 0, \dots) \mid m \text{ 为任一自然数}\}$$

显然 E 是 l 的一个稠密子集，但 $y \in E$ ，必存在 $x \in l$ ，使 $(\lambda I - T)x = y$ ，故 $\overline{R(T_\lambda)} = l$ 。从而 $\lambda \in F - \{a_n\}$ 时，有 $\lambda \in \sigma_o(T)$ (T 的连续谱)。

12. 在 l 中定义如下的算子：

$$y = Tx : x = \{\xi_n\}, y = \{\eta_n\};$$

$$\eta_1 = 0, \eta_k = -\xi_{k-1} \quad (k \geq 2)$$

证明 T 没有特征值， $\rho(T)$ 由一切满足 $|\lambda| > 1$ 的点组成，且 $\|R_\lambda\| = (|\lambda| - 1)^{-1}$ 。

证 (i) 因为

$$(\lambda - T)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \xi_1 = 0 \\ \lambda \xi_k + \xi_{k-1} = 0 \quad (k = 2, 3, \dots) \end{cases}$$

$\lambda \neq 0$ 时，必有 $0 = \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \dots$ ， $\lambda = 0$ 时，显然有 $x = 0$ 。故 λ 为任何数，均有 $x = 0$ ，即 T 没有特征值。

(ii) $|\lambda| > 1$ 时，因为 $\|T\| = 1$ ，则据参考文献[2] p96 定理 2.10 有 $\lambda \in \rho(T)$ ，且 $\|R_\lambda\| \leq (|\lambda| - 1)^{-1}$ 。

(iii) $|\lambda| < 1$ 时，

$$\begin{aligned} \|(\lambda - T)x\| &= |\lambda| \cdot |\xi_1| + |\lambda \xi_2 + \xi_1| + |\lambda \xi_3 + \xi_2| + \dots \\ &\geq |\xi_1| - |\lambda| \cdot |\xi_1| + |\xi_2| - |\lambda| \cdot |\xi_2| \\ &\quad + |\xi_3| - |\lambda| \cdot |\xi_3| + \dots = (1 - |\lambda|) \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \end{aligned}$$

因为 $1 - |\lambda| > 0$ ，故 $(\lambda - T)^{-1}$ 存在有界，但易知 $|\lambda| < 1$ 时， $R(T_\lambda) \neq l$ ，所以 $\lambda \in \sigma_\gamma(T)$ (剩余谱)，从而

$$\sigma(T) = \{\lambda \mid |\lambda| \leq 1\}, \rho(T) = \{\lambda \mid |\lambda| > 1\}$$

(iv) 最后证明 $\|R_\lambda\| = \frac{1}{|\lambda|-1}$ 。因为

$$R_\lambda x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} T^n x$$

现取 $x = (1, 0, 0, \dots)$, $\|x\| = 1$, 则

$$\|R_\lambda x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^n} = \frac{1}{|\lambda|-1}$$

于是 $\|R_\lambda\| \geq \frac{1}{|\lambda|-1}$, 从而 $\|R_\lambda\| = \frac{1}{|\lambda|-1}$ 。

13. 设有无穷阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots\dots \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

由 A 定义了 l^p 上的有界线性算子 $T: y = Tx$, 其中 $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}$, $y = \{\xi_2, \xi_3, \dots\}$ 。证明 $\rho(T)$ 由满足 $|\lambda| > 1$ 的一切点 λ 组成, T 的特征值由满足 $|\lambda| < 1$ 的一切点组成, 对于 $|\lambda| = 1$, $\lambda I - T$ 是一一对应的。

证 (i) $\|T\| = 1$ 显然, 所以 $|\lambda| > 1$ 时, $\lambda \in \rho(T)$ 。

(ii) $|\lambda| < 1$ 时,

$$\begin{aligned} (\lambda I - T)x = 0 &\Leftrightarrow \{\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n+1}, \dots\} \\ &= \lambda \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\} \end{aligned}$$

它有非零解

$$x = \xi_1 \{1, \lambda, \lambda^2, \dots\} \in l^p \quad (\xi_1 \neq 0)$$

故 $|\lambda| < 1$ 时, $\lambda \in \sigma_p(T)$ (特征值)。从而

$$\sigma(T) = \{\lambda \mid |\lambda| \leq 1\}, \quad \rho(T) = \{\lambda \mid |\lambda| > 1\}$$

(iii) $|\lambda| = 1$ 时, 由 $(\lambda - T)x = 0$ 可知 x 必具有形式

$$\xi_1 \{1, \lambda, \lambda^2, \dots\}$$

故当且仅当 $\xi_1 = 0$ 时有 $x \in l^p$, 所以在 l^p 中 $(\lambda - T)x = 0$ 只有零解, 即 $|\lambda| = 1$ 时, $(\lambda I - T)$ 是一一对应的。

14. 设 T 是定义在 Banach 空间上的有界线性算子, $\alpha \in \rho(T)$, $A = R_\alpha$, 设 μ, λ 满足 $\mu(\alpha - \lambda) = 1$, 则 $\mu \in \sigma(A)$ 的充要条件是 $\lambda \in \sigma(T)$ 。又设 $\mu \in \rho(A)$, 且 $\mu(\alpha - \beta) = 1$, 则

$$(\mu I - A)^{-1} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} R_\beta$$

证 设 $\lambda \in \rho(T)$, $\mu(\alpha - \lambda) = 1$, 则 $(\alpha I - T)(\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{B}(E)$, 而

$$\begin{aligned} (\alpha I - T)(\lambda I - T)^{-1} &= A^{-1} \left[(\alpha I - T) - \frac{I}{\mu} \right]^{-1} \\ &= \left\{ \left[(\alpha I - T) - \frac{I}{\mu} \right] \cdot A \right\}^{-1} \\ &= \left(\frac{\mu I - A}{\mu} \right)^{-1} = \mu(\mu I - A)^{-1} \quad (*) \end{aligned}$$

所以 $\mu \in \rho(A)$ 。

反之, 若 $\mu \in \rho(A)$, 由 $\mu(\alpha - \lambda) = 1$, $\mu \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} (\mu I - A)^{-1} A &= [A^{-1}(\mu I - A)]^{-1} = (\mu A^{-1} - I)^{-1} \\ &= [\mu(\lambda I - T)]^{-1} = \frac{I}{\mu} (\lambda I - T)^{-1} \end{aligned}$$

故 $\lambda \in \rho(T)$, 所以

$$\mu \in \sigma(A) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(T)$$

现设 $\mu \in \rho(A)$, $\mu(\alpha - \beta) = 1$, 则 $\beta \in \rho(T)$, 由 (*) 立即可得

$$\begin{aligned}
 (\beta I - T)^{-1} &= \mu A(\mu I - A)^{-1} \\
 &= \mu[-(\mu I - A) + \mu I](\mu I - A)^{-1} \\
 &= \mu^2(\mu I - A)^{-1} - \mu I
 \end{aligned}$$

所以
$$(\mu I - A)^{-1} = \frac{I}{\mu} + \frac{R_\beta}{\mu^2}$$

15. 设无穷阵 (α_{kj}) 适合条件 $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{kj}|^q \right)^{\frac{p}{q}} < +\infty$$

作算子 T 如下:

$$y = Tx: \eta_k = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{kj} \xi_j \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

其中 $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}$, $y = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots\}$, 证明 T 是 l^p 到 l^p 的有界性算子。

证 设 $x = \{\xi_j\} \in l^p$, 则由Hölder不等式可得

$$\begin{aligned}
 \|Tx\| &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{kj} \xi_j \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{kj}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{kj}|^q \right)^{\frac{p}{q}} \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|
 \end{aligned}$$

所以 $Tx \in l^p$, 且 T 有界。

16. 设 T 是由赋范线性空间 E 到赋范线性空间 E_1 的线性算子, $N = \{x: Tx = 0\}$, 称 N 为 T 的零空间。证明当 T 有界

时, N 是 E 的闭子空间。反之, 若 N 是 E 的闭子空间, 问 T 是否有界, 如果不成立, 试举出例子。

证 N 为 E 的线性子空间显然, 现设 $x \in \overline{N}$, 则存在 $x_n \in N$, 使 $x_n \longrightarrow x$, 因为 T 连续, 则

$$Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = 0$$

所以 $x \in N$, N 为闭子空间。

反之不一定成立, 例如取 $E = C^1[a, b]$, $E_1 = C[a, b]$, T 由下式定义:

$$Tx(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

T 无界, 易知

$$N = \{x(t) : Tx = 0\} = \{x(t) : x(t) = c, c \in R^1\}$$

它是 $C^1[a, b]$ 中的闭集。

但是, 我们可以证明若 T 是闭线性算子, 则必有 N 为闭子空间。

17. 设 E 为 Banach 空间, $\{T_n\} \subset \mathcal{B}(E)$ ($n = 1, 2, \dots$) 依算子范数收敛于 $T \in \mathcal{B}(E)$, λ_0 是 T 的正则值, 则当 n 充分大时, λ_0 也是 T_n 的正则值, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_0 I - T_n)^{-1} = (\lambda_0 I - T)^{-1}$$

证 由于

$$(\lambda_0 I - T_n) = [I - (T_n - T)(\lambda_0 I - T)^{-1}](\lambda_0 I - T)$$

$T_n \longrightarrow T$ ($n \rightarrow \infty$), 则对 $0 < \varepsilon < 1$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$\|(T_n - T)(\lambda_0 I - T)^{-1}\| \leq \varepsilon < 1$$

故当 $n > N$ 时,

$$(\lambda_0 I - T_n)^{-1} = (\lambda_0 I - T)^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} [(T_n - T)(\lambda_0 I - T)^{-1}]^m$$

$(\lambda_0 I - T_n)^{-1} \in \mathcal{B}(E)$, 即 $n > N$ 时, $\lambda_0 \in \rho(T_n)$, 且有

$$\|(\lambda_0 I - T_n)^{-1} - (\lambda_0 I - T)^{-1}\|$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \|T_n - T\|^m \cdot \|(\lambda_0 I - T)^{-1}\|^m$$

$$= \frac{\|T_n - T\| \cdot \|(\lambda_0 I - T)^{-1}\|}{1 - \|T_n - T\| \cdot \|(\lambda_0 I - T)^{-1}\|}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_0 I - T_n)^{-1} = (\lambda_0 I - T)^{-1}$$

18. 设 E 为 Banach 空间, $T \in \mathcal{B}(E)$, 设 μ_0 是 T^n 的特征值, 则 μ_0 的 n 次方根中至少有一个是 T 的特征值。

证 设 $\lambda^n - \mu_0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$, 其中 $\lambda_i^n = \mu_0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 则

$$T^n - \mu_0 I = (T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \cdots (T - \lambda_n I)$$

因为 μ_0 是 T^n 的特征值, 所以存在 $x \in E$, $x \neq 0$, 使

$$(T^n - \mu_0 I)x = 0$$

即

$$(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \cdots (T - \lambda_n I)x = 0$$

故至少有一个 λ_i ($1 \leq i \leq n$) 是 T 的特征值。

19. 设 f 是定义在 $C[a, b]$ 上的线性泛函, 而且对 $C[a, b]$ 中一切满足 $x(t) \geq 0$ 的函数有 $f(x) \geq 0$, 证明 f 连续, 于是进一步证明存在 $[a, b]$ 上的单调上升函数 $v(t)$, 使

$$f(x) = \int_a^b x(t) dv(t)$$

证 令 $x_0(t) \equiv 1$, 则对一切 $x(t) \in C[a, b]$, 当 $\|x\| \leq 1$ 时, 有 $x_0(t) \pm x(t) \geq 0$, 所以

$$f(x_0 \pm x) \geq 0$$

则

$$|f(x)| \leq f(x_0) \quad (\text{当 } \|x\| \leq 1 \text{ 时})$$

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \leq f(x_0)$$

故 f 为 $C[a, b]$ 上的有界线性泛函, 且 $\|f\| = f(x_0)$, 从而

$$f(x) = \int_a^b x(t) dv(t) \quad (\forall x(t) \in C[a, b])$$

其中 $v(t)$ 为右连续的圈变函数。下面我们证明 $v(t)$ 为单调上升函数。

证法一 任取 $a < t_1 < t_2 < b$, 并设 t_1, t_2 为 $v(t)$ 的连续点, 作 $C[a, b]$ 中的函数 $x(t)$ 如下:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t \in [t_1, t_2] \\ 0 & t \in [a, t_1 - \frac{1}{n}] \cup [t_2 + \frac{1}{n}, b] \\ \text{线性函数} & t \in [t_1 - \frac{1}{n}, t_1] \cup [t_2, t_2 + \frac{1}{n}] \end{cases}$$

$x(t) \geq 0$, 故

$$0 \leq f(x) = \int_a^b x(t) dv(t) = \int_{t_1 - \frac{1}{n}}^{t_2 + \frac{1}{n}} x(t) dv(t)$$

$$= x(t)v(t) \Big|_{t_1 - \frac{1}{n}}^{t_2 + \frac{1}{n}} - \int_{t_1 - \frac{1}{n}}^{t_2 + \frac{1}{n}} v(t) dx(t)$$

$$\begin{aligned}
&= -n \int_{t_1 - \frac{1}{n}}^{t_1} v(t) dt + n \int_{t_2}^{t_2 + \frac{1}{n}} v(t) dt \\
&= \frac{1}{n} \left[\int_a^{t_2 + \frac{1}{n}} v(t) dt - \int_a^{t_2} v(t) dt \right] \\
&\quad - \left(-\frac{1}{n} \right) \left[\int_a^{t_1 - \frac{1}{n}} v(t) dt - \int_a^{t_1} v(t) dt \right]
\end{aligned}$$

上式中令 $n \rightarrow \infty$, 使得

$$v(t_2) \geq v(t_1)$$

再利用 $v(t)$ 的右连续性知对一切 $a < t_1 < t_2 < b$ 有

$$v(t_2) \geq v(t_1)$$

类似地可证明

$$v(a) \leq v(t) \leq v(b) \quad (a < t < b)$$

故 $v(t)$ 是 $[a, b]$ 上的单调上升函数。

证法二 利用 LS 积分性质, 任取 $a < t_1 < t_2 \leq b$, 令

$$\begin{aligned}
x(t) &= \chi_{(t_1, t_2]}^{(t)} \text{ —— } (t_1, t_2] \text{ 上的特征函数} \\
x_n(t) &= \begin{cases} 0 & t \in [a, t_1] \cup [t_2 + \frac{1}{n}, b] \\ 1 & t \in [t_1 + \frac{1}{n}, t_2] \\ \text{线性函数} & \text{其它} \end{cases}
\end{aligned}$$

则 $x_n(t) \in C[a, b]$, $0 \leq x_n(t) \leq 1$, 且 $x_n(t) \rightarrow x(t)$, 据 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$(LS) \int_a^b \chi_{[t_1, t_2]} dv(t) \geq 0$$

即

$$v(t_2) \geq v(t_1)$$

同理可证

$$v(t) \geq v(a) \quad (\forall t > a)$$

故 $v(t)$ 是 $[a, b]$ 上的单调上升函数。

20. 证明无穷维赋范线性空间的共轭空间是无穷维的。

证 设 E 为无穷维, 而 E^* 为有穷维赋范线性空间, 容易证明 $(E^*)^*$ 与 E 等距同构, 此处 n 为 E^* 的维数, 故 E^{**} 也是 n 维的。设 J 为 E 到 E^{**} 中的自然嵌入映射, 则 $JE \subset E^{**}$, JE 是无穷维的。矛盾, 故 E^* 为无穷维。

21. 证明 Banach 空间 E 为自反的充要条件是 E^* 为自反的。

证 设 E 自反, 任取 $\varphi \in E^{***}$, 定义 $f \in E^*$ 如下:

$$f(x) = \varphi(Jx) \quad (\forall x \in E)$$

因为任一 $x^{**} \in E^{**}$, 有 $x \in E$, 使 $x^{**} = Jx$, 则由 $\varphi(x^{**}) = \varphi(Jx) = f(x) = x^{**}(f)$ 得 $\varphi = J_1 f$, 其中 J_1 为 $E^* \rightarrow E^{***}$ 的自然嵌入映象, 故 E^* 自反。

现设 E^* 自反, 但 $E \neq E^{**}$, 我们记

$$\widehat{E} = \{F_\bullet \in E^{**} : x \in E, F_\bullet = Jx\} = \{\widehat{x} : x \in E\}$$

因为 E 完备, 则 \widehat{E} 是 E^{**} 的真闭子空间, 由 Hahn—Banach 定理, 必存在 $\varphi \in E^{***}$, 使

$$\varphi \neq 0, \varphi(\widehat{x}) = 0 \quad (\forall \widehat{x} \in \widehat{E})$$

因为 $E^* = E^{***}$, 则 $\varphi = J_1 f$, 其中 $f \in E^*$, $\|\varphi\| = \|f\|$. 由于

$$\varphi(\widehat{x}) = J_1 f(\widehat{x}) = \widehat{x}(f) = f(x)$$

故

$$f(x) = 0 \quad (\forall x \in E), \quad f = 0$$

矛盾，从而 E 必自反。

22. 证明任何有限维赋范线性空间都是自反的。

证 设 E^n 为 n 维赋范线性空间， $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是它的一组基底，据[2]定理3.1推论2我们可作出 $(E^n)^*$ 中的元组 $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ 如下：

$$e'_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

任取 $x \in E^n$, $x = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$, 则

$$e'_i(x) = \xi_i$$

容易证明 $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ 是 $(E^n)^*$ 的一组基底，故 $(E^n)^*$ 是 n 维的，于是 $(E^n)^{**}$ 也是 n 维的。 $J(E^n) \subset (E^n)^{**}$, $J(E^n)$ 是 n 维的，故 $J(E^n) = (E^n)^{**}$ ，即 E^n 自反。

23. 设 E 为复的赋范线性空间， $f \in E^*$ ，已知 f 可表为

$$f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$$

其中 φ 为 E 上的实齐性实线性泛函，证明 $\|\varphi\| = \|f\|$ 。

证 不妨设 $f \neq 0$, $f(x) = e^{i\theta} |f(x)|$, 因为 φ 为实泛函，则

$$|f(x)| = e^{-i\theta} f(x) = f(e^{-i\theta} x) = \varphi(e^{-i\theta} x)$$

故

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(e^{-i\theta} x)| \\ &= \sup_{\|y\|=1} |\varphi(y)| = \|\varphi\| \end{aligned}$$

24. 设 $v(t) \in V[a, b]$, 已知由

$$f(x) = \int_a^b x(t) dv(t)$$

定义了 $C[a, b]$ 上的一个有界线性泛函 f . 举例说明, 存在这样的 $v(t)$ 使 $\|f\| < \bigvee_a^b(v)$.

解 由 $f(x) = \int_a^b x(t) dv(t)$ 立即可知 $\|f\| \leq \bigvee_a^b(v)$, 我们令 $M = \sup_{a \leq x \leq b} |v(x)|$, 任取一点 $c \in (a, b)$ 以及 $\varepsilon > 0$, 作

函数

$$v_1(t) = \begin{cases} v(t) & t \neq c \\ 3M + \varepsilon & t = c \end{cases}$$

则

$$f(x) = \int_a^b x(t) dv(t) = \int_a^b x(t) dv_1(t) \\ (\forall x(t) \in C[a, b])$$

但显然有 $\bigvee_a^b(v_1) \geq \bigvee_a^b(v) + 2\varepsilon$, 故 $\|f\| < \bigvee_a^b(v_1)$.

25. 求出 l, C, C_0 上有界线性泛函的一般形式。

解 (1) 求 l^* : 任取 $x = \{\xi_k\} \in l$, 显然有

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \quad (\text{在 } l \text{ 中收敛})$$

其中 $e_k = \{ \overbrace{0, 0, \dots, 0}^{k \text{ 位}}, 1, 0, \dots \}$. 任取 $f \in l^*$, 令 $C_k = f(e_k)$, $a = \{C_k\}$

则

$$|C_k| \leq \|f\|$$

故 $a = \{C_k\} \in l^\infty$, 且 $\|a\|_\infty \leq \|f\|$, 利用 f 的连续性, 可得

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\sum_{k=1}^n \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k C_k$$

则

$$|f(x)| \leq \|a\|_\infty \cdot \|x\| \quad (\forall x \in l)$$

$$\|f\| \leq \|a\|_\infty$$

故

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k C_k \quad \text{且} \quad \|f\| = \|a\|_\infty$$

反之, 任取 $a = \{C_k\} \in l^\infty$, 令 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \xi_k$, 则显然

有 $f \in l^*$, 故 $l^* = l^\infty$ 。

(2) 求 C^* : $e_k \in C$, 再令 $e = (1, 1, 1, \dots) \in C$, 任取 $x = \{\xi_k\} \in C$, 设 $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_k$, 则可以证明

$$x = \alpha e + \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k - \alpha) e_k \quad (\text{在 } C \text{ 中收敛})$$

任取 $f \in C^*$, 令 $f(e_k) = C_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), $f(e) = C'$, 则

$$f(x) = \alpha C' + \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k - \alpha) C_k \quad (1)$$

取 $x_N = \{\xi_i^{(N)}\}$, 其中

$$\xi_i^{(N)} = \begin{cases} \operatorname{sgn} C_i & (i \leq N) \\ 0 & (i > N) \end{cases}$$

则

$$f(x_N) = \sum_{k=1}^N |C_k|$$

可不妨设存在 $C_k \neq 0$, 则

$$\sum_{k=1}^N |C_k| = |f(x_N)| \leq \|f\|$$

(对充分大的自然数 N 成立)

故

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k| < +\infty \quad (2)$$

令 $C_0 = C' - \sum_{k=1}^{\infty} C_k$, 则(1)式可改写成

$$f(x) = \alpha C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k C_k \quad (3)$$

反之, 任取数列 C_0, C_1, C_2, \dots , 满足 $\sum_{k=1}^{\infty} |C_k| < +\infty$,

令

$$f(x) = \alpha C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \xi_k$$

其中 $\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k$, 易证 $f \in C^*$, 且

$$\|f\| \leq |C_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| \quad (4)$$

另一方面, 取 $x_N = \{\xi_i^{(N)}\}$, 其中

$$\xi_i^{(N)} = \begin{cases} \operatorname{sgn} C_i & (i \leq N) \\ \operatorname{sgn} C_0 & (i > N) \end{cases}$$

不妨设存在 $C_k \neq 0$, 则

$$\|x_N\| = 1, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i^{(N)} = \operatorname{sgn} C_0$$

从而

$$f(x_N) = |C_0| + \sum_{k=1}^N |C_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} C_k \operatorname{sgn} C_0$$

$$|C_0| + \sum_{k=1}^N |C_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} C_k \operatorname{sgn} C_0 \leq \|f\|$$

令 $N \rightarrow \infty$, 使得

$$|C_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| \leq \|f\| \quad (5)$$

由(4), (5)知

$$\|f\| = |C_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|$$

故

$$l = C^*, \quad f \in C^*$$

$$f \longleftrightarrow \{C_0, C_1, C_2, \dots\} = \{C_0, f(e_1), f(e_2), \dots\}$$

$$C_0 = f(e) - \sum_{k=1}^{\infty} C_k$$

反之, 任取 $b \in l$, $b \longleftrightarrow f \in C^*$, 其中

$$f(x) = b_1 \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+1} \xi_k$$

(3) 求 C_0^* : 任取 $f \in C_0^*$, 令 $C_k = f(e_k)$, 因为 $x =$

$\{\xi_k\} \in C_0$ 时, 有 $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$, 所以 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \xi_k$. 下面

证明 $\{C_k\} \in l$, 事实上, 对一切自然数 N , 取 $x_N = \{\xi_i^{(N)}\}$, 其中

$$\xi_i^{(N)} = \begin{cases} \operatorname{sgn} C_i & (i \leq N) \\ 0 & (i > N) \end{cases}$$

不妨设 $\|x_N\| = 1$, $x_N \in C_0$ 显然, 则

$$f(x_N) = \sum_{i=1}^N |C_i|$$

故

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k| \leq \|f\|$$

另一方面, 任取 $\{C_k\} \in l$, 我们令

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k C_k \quad (\forall x = \{\xi_k\} \in C_0)$$

易知 $f \in C_0^*$, 且 $\|f\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|$, 从而 $C_0^* = l$, 且 $\|f\| = \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|$.

26. 求出 $L[a, b]$ 上有界线性泛函的一般形式。

解 不妨设 $[a, b] = [0, 1]$, 任取 $f \in L^*[0, 1]$, 设 $p \geq 1$,

因为 $x(t) \in L^p[0, 1]$ 时, 有

$$\int_0^1 |x(t)| dt \leq \left\{ \int_0^1 |x(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}$$

故 f 可作为 $L^p[0, 1]$ 上的有界线性泛函, 据参考文献[2] p108

定理3.3, 存在 $y_p(t) \in L^q[0, 1]$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), 使

$$f(x) = \int_0^1 x(t) y_p(t) dt \quad (\forall x(t) \in L^p[0, 1]) \quad (*)$$

当 $1 < p_1 < p_2$ 时, $L^{p_2}[0, 1] \subset L^{p_1}[0, 1]$, $\forall x(t) \in L^{p_2}[0, 1]$,

有
$$f(x) = \int_0^1 x(t) y_{p_1}(t) dt = \int_0^1 x(t) y_{p_2}(t) dt$$

于是据泛函数所对应函数的唯一性, 得

$$y_{p_1}(t) = y_{p_2}(t)$$

故 $y_p(t)$ 与 p 无关, 记为 $y(t)$, 易知

$$\left\{ \int_0^1 |y(t)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \leq \|f\| \quad (\forall q > 1)$$

令 $q \rightarrow \infty$, 得

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^1 |y(t)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|$$

故 $y(t) \in L^\infty[0, 1]$, 且

$$\|y\|_\infty \leq \|f\|$$

现设 $x(t) \in L[0, 1]$, 据参考文献[1]第五章引理2.1, 必存在有界可测函数列 $x_n(t)$, 使

$$\int_0^1 |x_n(t) - x(t)| dt \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

由(*)知

$$f(x_n) = \int_0^1 x_n(t)y(t)dt$$

因为 $|x_n(t)| \leq |x(t)|$, 利用Lebesgue控制收敛定理及 f 的连续性,

$$f(x) = \int_0^1 x(t)y(t)dt$$

另一方面, 任取 $y(t) \in L^\infty[0, 1]$, 令

$$f(x) = \int_0^1 x(t)y(t)dt \quad (x(t) \in L[0, 1])$$

则 f 是 $L[0, 1]$ 上的有界线性泛函, 且

$$\|f\| \leq \|y\|_\infty$$

故

$$\|f\| = \|y\|_\infty, \quad L^*[0, 1] = L^\infty[0, 1]$$

27. 证明 $(l^p)^* = l^q$ ($1 < p < +\infty$, $q = (p-1)^{-1}$).

本题可参阅刘斯铁尔尼克著的“泛函分析概要”P188—P189或者复旦大学编“实变与泛函”下册P137—P138.

28. 试证泛函 $f(v) = \int_0^{\frac{1}{2}} dv(t)$ 是空间 $V_0[0, 1]$ 上的有界线性泛函, 其中 $v \in V_0[0, 1]$. 这里 $V_0[0, 1] = \{g(x); g(0) = 0, \text{在}(0, 1)\text{上右连续的围变函数}\}$.

29. 试从题28作出结论: $C[0, 1]$ 不是自反空间.

证 由28题知 $f(v) = \int_0^{\frac{1}{2}} dv(t)$ 所定义的泛函 $f \in C^{**}[0, 1]$, 若 $C[0, 1]$ 自反, 则存在 $x(t) \in C[0, 1]$, 使

$$f(v) = \int_0^1 x(t)dv(t) = \int_0^{\frac{1}{2}} dv(t)$$

对一切 $v(t) \in V_0[0,1]$ 成立, 从而可得

$$x(t) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

这与 $x(t) \in C[0,1]$ 矛盾, 故 $C[0,1]$ 不是自反空间。

30. 如果 E 是无穷维赋范线性空间, 则在 E 上存在不连续的线性泛函。

解 设 $B \subset E$ 是 E 的 Hamel 基, 因为 E 是无穷维的, 故 B 是无穷集, 任取 $\{x_n\} \subset B$, 定义 E 上的线性泛函如下:

$$\tilde{f}(x_n) = n\|x_n\| \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$f(x) = 0 \quad x \in B - \{x_n\}$$

任取 $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$ ($y_i \in B, i = 1, 2, \dots, n$), 令

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(y_i)$$

易知 f 是 E 上的不连续线性泛函。

31. 设 E_0 是赋范线性空间, 不完备, E 是 E_0 的完备化空间, 则 $E_0^* = E^*$ 。

证 任取 $f \in E_0^*$, 定义 $\tilde{f} \in E^*$ 如下: $x \in E_0$ 时, $\tilde{f}(x) = f(x)$, $x \in E - E_0$ 时, $\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$, 其中 $x_n \in E_0$,

$x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$ 。显然 \tilde{f} 是由 f 唯一确定的, 且 $\|\tilde{f}\| = \|f\|$, 我们令

$$Tf = \tilde{f} \quad (f \in E_0^*)$$

则 T 是 E_0^* 到 E^* 中的等距同构映象。另一方面, 对任一 $\phi \in E^*$, 令 $f = \phi|_{E_0}$, 则 $f \in E_0^*$, 显然 $Tf = \phi$, 故 T 是 E_0^*

到 E^* 上的等距同构映象, 即

$$E_0^* = E^*$$

32. 试证明 $C[a, b]$ 中的算子序列 $A_n x(t) = x(t^{1+\frac{1}{n}})$ 强收敛于恒同算子, 但不是依算子范数收敛。

证 任取 $x(t) \in C[0, 1]$, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $t_1, t_2 \in [0, 1]$, $|t_1 - t_2| < \delta$ 时, 有

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$$

取 $\delta_0 > 0$, $\delta_0 < \frac{\delta}{2}$, 则 $t \in [0, \delta_0]$ 时,

$$|t^{1+\frac{1}{n}} - t| < 2t < \delta \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

从而当 $t \in [0, \delta_0]$ 时, 对所有自然数 n , 有

$$|A_n x(t) - x(t)| = |x(t^{1+\frac{1}{n}}) - x(t)| < \varepsilon$$

当 $t \geq \delta_0$ 时, 存在 N , 使得 $n > N$ 时, 有

$$|t^{1+\frac{1}{n}} - t| < \delta$$

于是 $n > N$ 时, 对一切 $t \in [0, 1]$, 有

$$|x(t^{1+\frac{1}{n}}) - x(t)| < \varepsilon$$

故 A_n 强收敛于恒同算子 I 。

下面我们证明 $\|A_n - I\|$ 不收敛于零。取定 $t_0 \in (0, 1)$, 对每个 n , 我们作 $C[0, 1]$ 中函数 $x_n(t)$ 如下:

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, t_0^{1+\frac{1}{n}}] \\ 1 & t \in [t_0, 1] \\ \text{线性} & t \in [t_0^{1+\frac{1}{n}}, t_0] \end{cases}$$

则

$$\|x_n\| = 1$$

$$\|A_n - I\| \geq \|(A_n - I)x_n\| \geq |x_n(t_0^{1+\frac{1}{n}}) - x_n(t_0)| = 1$$

故 A_n 按算子范数不收敛于 I 。

33. Banach 空间 E 称为具有可列基 $\{x_n\} (n = 1, 2, \dots)$,

如果每个 $x \in E$ 可唯一地表成 $x = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x_n$ 。证明

(i) $\{x_n\}$ 中的任意有限个都是线性无关的;

(ii) 令 $f_n(x) = C_n (n = 1, 2, 3, \dots)$, 这里 $x = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x_n$,

则 f_n 是 E 上的有界线性泛函;

(iii) 令 W 为使 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n x_n$ 在 E 中收敛的序列 $\{C_n\}$ 的全体,

在 W 中定义范数

$$\|w\| = \sup_m \left\| \sum_{n=1}^m C_n x_n \right\| \quad (w \in W)$$

则 W 为 Banach 空间;

(iv) 证明 E 是可分的。

证 (i) 显然成立, 我们先证明 (iii), 首先 W 显然是赋范线性空间, 只要证明 W 的完备性。任取 $w_k = \{C_n^{(k)}\}$ 为 W 中基本列, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $k > N$ 时, 对一切自然数 p 有

$$\|w_{k+p} - w_k\| = \sup_m \left\| \sum_{n=1}^m (C_n^{(k+p)} - C_n^{(k)}) x_n \right\| < \varepsilon \quad (*)$$

从而知

$$C_n^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} C_n \quad (\forall n)$$

令 $w = \{C_n\}$, 下面证明 $w \in W$, 且 $w_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} w$. 由(*)对任一自然数 m , 当 $k > N$ 时, 有

$$\left| \sum_{n=1}^m (C_n^{(k+p)} - C_n^{(k)}) x_n \right| < \varepsilon \quad (\forall p)$$

令 $p \rightarrow \infty$, 得

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^{(k)} - C_n) x_n \right| \leq \varepsilon \quad (k > N)$$

从而对任意的自然数 n_1, n_2 成立:

$$\left| \sum_{n=n_1+1}^{n_2} (C_n^{(k)} - C_n) x_n \right| \leq 2\varepsilon \quad (k > N)$$

故

$$\left| \sum_{n=n_1+1}^{n_2} C_n x_n \right| \leq 2\varepsilon + \left| \sum_{n=n_1+1}^{n_2} C_n^{(k)} x_n \right| \quad (k > N)$$

固定 $k > N$, 由于 $w_k \in W$, 则存在 N_1 , 当 $n_1, n_2 > N_1$ 时, 有

$$\left| \sum_{n=n_1+1}^{n_2} C_n^{(k)} x_n \right| < \varepsilon$$

所以 $n_1, n_2 > N_1$ 时, 有

$$\left| \sum_{n=n_1+1}^{n_2} C_n x_n \right| < 3\varepsilon$$

故 $w = (C_n) \in W$, 且 $w_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} w$, W 完备得证。

(ii) 作 $W \rightarrow E$ 上的映射 T 如下:

$$w = (C_n) \in W, \quad Tw = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x_n$$

因为对任意的自然数 m 有

$$\|w\| \geq \left\| \sum_{n=1}^m C_n x_n \right\|$$

所以

$$\|w\| \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^m C_n x_n \right\| = \|Tw\|$$

故 $\|T\| \leq 1$. 又因为 T 一对一, 据逆算子定理 $T^{-1} \in \mathcal{B}(E, W)$. 现设

$$x^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(k)} x_n, \quad x^{(k)} \longrightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

则

$$w^{(k)} = T^{-1} x^{(k)} \longrightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

从而容易证明对 $\forall n$, 有

$$C_n^{(k)} \longrightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

即

$$f_n(x^{(k)}) \longrightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

故 f_n 是 E 上的有界线性泛函。

(iv) 因为集合 $\left\{ \sum_{n=1}^m r_n x_n \mid m \text{ 为任一自然数, } r_n (n = 1, 2, \dots, m) \text{ 均为有理数} \right\}$ 是 E 中的可数稠子集, 故 E 可分。

34. 设 $x_n = \left\{ \xi_k^{(n)} \right\} \in l^p (n = 1, 2, 3, \dots)$, 则 $\{x_n\}$ 弱收

敛于 $x = \{\xi_k\} \in l^p$ 的充要条件是 $\sup_{n \geq 1} \|x_n\| < +\infty$, 且对每个

$$k, \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k.$$

证 必要性: 设 $x_n \xrightarrow{w} x$, 则据共鸣定理易知

$$\sup_n \|x_n\| < +\infty$$

我们只要证明对每个 $k, \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k$, 取

$$f \longleftrightarrow \overbrace{\{0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots\}}^{k \text{ 位}} \in l^q = (l^p)^*$$

则

$$f(x_n) = \xi_k^{(n)}, \quad f(x) = \xi_k$$

因为 $x_n \xrightarrow{w} x$, 所以

$$\xi_k^{(n)} \longrightarrow \xi_k \quad (n \rightarrow \infty)$$

充分性: 设 $p > 1$, $x, x_n \in l^p = (l^q)^*$, 取 $e_n \in l^q$, 对任

一自然数 m 显然有 $y = \sum_{k=1}^m \eta_k e_k \in l^q$, 因为 $\xi_k^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi_k$, 故

$x_n(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x(y)$, 由于 $\left\{ \sum_{k=1}^m \eta_k e_k \right\}$ 全体在 l^q 中稠密, 利用

条件 $\{\|x_n\|\}$ 一致有界立即得 $x_n \xrightarrow[l^p]{w} x$ ($p > 1$)。

当 $p = 1$ 时, 结论不一定成立。例如取 $e_n \in l$, 其中 $e_n =$

$$\{\xi_k^{(n)}\} = \{0, \dots, 0, \overbrace{1}^{n \text{ 位}}, 0, \dots\}, \text{ 显然满足条件 } \|e_n\| = 1,$$

对每个 $k, \xi_k^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ 。但对于 $f \longleftrightarrow \{a_i\} \in l^\infty$, 其中 a_i 不收敛于零 ($i \rightarrow \infty$), 则 $f(e_n) = a_n$ 不收敛于零 ($n \rightarrow \infty$), 所以 $\{e_n\}$ 在 l^1 中不弱收敛于零。

35. 证明 l 中点列的弱收敛与强收敛等价。

证 设 $x_n \xrightarrow{w} x$, 不妨设 $x = 0$, 则对一切 $y = \{a_i\} \in l^\infty$, 有

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi_i^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

此处 $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}$ 。我们要证明 $x_n \xrightarrow{\text{强}} 0$, 即

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}| \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

设不然, 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 及 $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$, 使

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n_k)}| \geq \varepsilon_0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

不妨设上面的不等式对一切 n 都成立。因为 $x_n \in l$, 故对每个 n 都有

$$\sum_{i=k}^{\infty} |\xi_i^{(n)}| \longrightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

又因为 $x_n \xrightarrow{w} 0$, 故对每一个 i 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^{(n)} = 0$$

则若取定 i_1 , 必存在 n_1 , 使

$$\sum_{i=1}^{i_1} |\xi_i^{(n_1)}| < \frac{\varepsilon_0}{5}$$

因为 $\{\xi_i^{(n_1)}\} \in l$, 必存在 $i_2 > i_1$, 使

$$\sum_{i=i_2+1}^{\infty} |\xi_i^{(n_1)}| < \frac{\varepsilon_0}{5}$$

故

$$\sum_{i=i_1+1}^{i_2} |\xi_i^{(n_1)}| > \frac{3\varepsilon_0}{5}$$

对于 i_2 , 又存在 $n_2 > n_1$, 使

$$\sum_{i=1}^{i_2} |\xi_i^{(n_2)}| < \frac{\varepsilon_0}{5}$$

重复上述步骤, 得 $i_3 > i_2$, 使

$$\sum_{i=i_2+1}^{i_3} |\xi_i^{(n_2)}| > \frac{3\varepsilon_0}{5}$$

一般地可得 $i_k > i_{k-1}$ 及 $n_k > n_{k-1}$ ($k = 2, 3, \dots$), 使

$$\sum_{i=1}^{i_k} |\xi_i^{(n_k)}| < \frac{\varepsilon_0}{5}$$

$$\sum_{i=i_{k+1}}^{\infty} |\xi_i^{(n_k)}| < \frac{\varepsilon_0}{5}$$

$$\sum_{i=i_k+1}^{i_{k+1}} |\xi_i^{(n_k)}| > \frac{3\varepsilon_0}{5}$$

我们令

$$a_i = \begin{cases} 0 & 1 \leq i \leq i_1 \\ \operatorname{sgn} \xi_i^{(n_k)} & i_k < i \leq i_{k+1} (k = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

则 $\{a_i\} \in l^\infty$, 而

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi_i^{(n_k)} &= \sum_{i=1}^{i_k} a_i \xi_i^{(n_k)} + \sum_{i=i_k+1}^{i_{k+1}} a_i \xi_i^{(n_k)} \\ &+ \sum_{i=i_{k+1}+1}^{\infty} a_i \xi_i^{(n_k)} \geq - \sum_{i=1}^{i_k} |\xi_i^{(n_k)}| + \sum_{i=i_k+1}^{i_{k+1}} |\xi_i^{(n_k)}| \\ &- \sum_{i=i_{k+1}+1}^{\infty} |\xi_i^{(n_k)}| > \frac{\varepsilon_0}{5} \end{aligned}$$

对任何自然数 k 成立, 这与 $x_{n_k} \xrightarrow{w} 0$ 矛盾, 故一定有

$x_n \xrightarrow{\text{强}} 0$.

36. Banach 空间 E 称为序列弱完备的, 是指若对每个 $f \in E^*$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 存在, 则存在 $x \in E$ 使 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x .

证明:

- (i) 自反空间都是序列弱完备的;
- (ii) $L[a, b]$, l 是序列弱完备的;
- (iii) $C[a, b]$ 不是序列弱完备的。

证 (i) 设 $E = E^{**}$, 并设对一切 $f \in E^*$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$

存在, 记 $x_n^{**} = Jx_n$ (J 为 $E \rightarrow E^{**}$ 的自然嵌入映像), 则 $x_n^{**}(f) = f(x_n)$ 对一切 $f \in E^*$ 收敛, 由共鸣定理知存在 $x^{**} \in E^{**}$, 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{**}(f) = x^{**}(f) \quad (\forall f \in E^*)$$

令 $x^{**} = Jx$, 就得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x) \quad (\forall f \in E^*)$$

故 $x_n \xrightarrow{w} x$, E 序列弱完备。

(ii) 对于 $L[a, b]$, 据 Yosida 著“泛函分析”(第5版) p121 定理 4: “设 $\{x_n\} \subset L[a, b]$, 则 $x_n \xrightarrow{w} x \in L[a, b]$ 的充要条件是: (a) $\sup_n \|x_n\| < +\infty$, (b) 对任一可测集 $B \subset [a, b]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int x_n(t) dm \text{ 存在有限。}”$$

现设对一切 $f \in L^*[0, 1] = L^\infty[0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 存在有

限, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b x_n(t) f(t) dm$ 存在有限, 取

$$f(t) = \chi_B(t) \in L^\infty[0, 1]$$

则可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B x_n(t) dm \text{ 存在有限}$$

又据共鸣定理, $\{\|x_n\|\}$ 有界, 再利用上面的定理, 则存在 $x(t) \in L[a, b]$, 使 $x_n \xrightarrow{w} x$, 故 $L[a, b]$ 序列弱完备。

对于 l , 利用 $l = L(N, \mathcal{B}, m)$, 其中 N 为自然数集, \mathcal{B} 为 N 的一切子集组成的集类, $B \in \mathcal{B}$ 时, $mB = B$ 中含有自然数的个数, 故 l 也是序列弱完备的(据 Yosida 著“泛函分析”第5版 p121 定理 4)。也可以直接证明。设 $x_n = \{\xi_i^{(n)}\} \in l$, 对任一 $f \in l^\infty$, $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则由共鸣定理知 $\{\|x_n\|\}$ 有界, 且对每个 i , $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i$, 以及对每个

$f \in l^\infty$, $\{f(x_n)\}$ 收敛。记 $x = \{\xi_i\}$, 易证 $x \in l$, 故不妨设

$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^{(n)} = 0 (\forall i)$ 。则 $f \longleftrightarrow \{a_i\} \in l^\infty$, $\{f(x_n)\} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \xi_i^{(n)} \right\}$ 为 Cauchy 点列。我们来证明 $\{x_n\}$ 为 l 中基本列。设

不然, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 以及子序列 $\{n_k\}$, $\{p_{n_k}\}$ (n_k, p_{n_k} 均为自然数), 使

$$\|x_{n_k + p_{n_k}} - x_{n_k}\| = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \xi_i^{(n_k + p_{n_k})} - \xi_i^{(n_k)} \right| \geq \varepsilon_0$$

($k = 1, 2, 3, \dots$)

不妨设

$$\|x_{n+p_n} - x_n\| = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \xi_i^{(n+p_n)} - \xi_i^{(n)} \right| \geq \varepsilon_0$$

($n = 1, 2, 3, \dots$)

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^{(n)} = 0 (\forall i)$, 取定 i_1 , 必存在 n_1 , 使

$$\sum_{i=1}^{i_1} \left| \xi_i^{(n_1 + p_{n_1})} - \xi_i^{(n_1)} \right| < \frac{\varepsilon_0}{5}$$

因为 $\left\{ \xi_i^{(n_1 + p_{n_1})} - \xi_i^{(n_1)} \right\} \in l$, 必存在 $i_2 > i_1$, 使

$$\sum_{i=i_2+1}^{\infty} \left| \xi_i^{(n_1 + p_{n_1})} - \xi_i^{(n_1)} \right| < \frac{\varepsilon_0}{5}$$

故

$$\sum_{i=i_1+1}^{i_2} \left| \xi_i^{(n_1 + p_{n_1})} - \xi_i^{(n_1)} \right| > \frac{3\varepsilon_0}{5}$$

类似于本章第35题,一般地可得 $i_k > i_{k-1}$, $n_k > n_{k-1}$ ($k = 2, 3, 4, \dots$), 使

$$\sum_{i=1}^{i_k} \left| \xi_i^{(n_k + p_{n_k})} - \xi_i^{(n_k)} \right| < \frac{\varepsilon_0}{5}$$

$$\sum_{i=i_{k+1}+1}^{\infty} \left| \xi_i^{(n_k + p_{n_k})} - \xi_i^{(n_k)} \right| < \frac{\varepsilon_0}{5}$$

$$\sum_{i=i_k+1}^{i_{k+1}} \left| \xi_i^{(n_k + p_{n_k})} - \xi_i^{(n_k)} \right| > \frac{3\varepsilon_0}{5}$$

令

$$a_i = \begin{cases} 0 & 1 \leq i \leq i_1 \\ \operatorname{sgn} \left[\xi_i^{(n_k + p_{n_k})} - \xi_i^{(n_k)} \right] & i_k < i \leq i_{k+1} \end{cases}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

则 $f = \{a_i\} \in l^\infty$, 但

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \left[\xi_i^{(n_k + p_{n_k})} - \xi_i^{(n_k)} \right] > \frac{\varepsilon_0}{5} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

这与 $f(x_n)$ 是基本列矛盾, 故 x_n 在 l 中强收敛于0, 即

$$x_n \xrightarrow{w} 0.$$

(iii) 对于 $C[a, b]$, 不妨设 $[a, b] = [0, 1]$, 取

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t = 1 \text{ 时} \\ 1 & t \neq 1 \text{ 时} \end{cases}$$

则

$$x_n(t) = t^n \in C[0, 1], \quad x_n(t) \xrightarrow{\text{处处}} x(t), \quad f \in C^*[0, 1]$$

存在 $g(t) \in V[0, 1]$, 使

$$f(x_n) = \int_0^1 x_n(t) dg(t)$$

据Lebesgue控制收敛定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x_n(t) dg(t) = \int_0^1 x(t) dg(t)$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 存在有限 (对一切 $f \in C^*[0, 1]$), 据参考文献[2]

p136例5, 若 $x_n(t) \xrightarrow{w} \bar{x}(t) \in C[0, 1]$, 必有 $\bar{x}(t) = x(t)$, 但 $x(t) \notin C[0, 1]$, 故 $\{x_n\}$ 不可能弱收敛于 $C[0, 1]$ 中某一元素, 因此 $C[0, 1]$ 不是序列弱完备的。

37. 赋范线性空间 E 称为一致凸的, 是指对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $\|x - y\| \geq \varepsilon$ ($\|x\| = \|y\| = 1$), 就有 $\|x + y\| \leq 2 - \delta$. 证明

(i) $C[a, b]$ 不是一致凸的;

(ii) $L[a, b]$ 、 l 都不是一致凸的;

(iii) 在一致凸空间中, 若 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x , 且 $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$, 则 $\{x_n\}$ 强收敛于 x .

证 (i) 在 $C[a, b]$ 中, 取 $x(t) = 1$, $y(t) = \frac{t-a}{b-a}$, 则

$$\|x\| = \|y\| = \frac{\|x + y\|}{2} = \|x - y\| = 1$$

设 $0 < \varepsilon < 1$, 则 $\|x - y\| > \varepsilon$, 但 $\frac{\|x + y\|}{2} > 1 - \delta$ ($\forall \delta > 0$),

故 $C[a, b]$ 不是一致凸的。

(ii) 在 $L[a, b]$ 中, 取 $x(t) = \frac{1}{b-a}$, $y(t) = \frac{2(t-a)}{(b-a)^2}$,

则

$$\|x\| = \|y\| = \frac{\|x+y\|}{2} = 1$$

$$\|x-y\| = \frac{1}{2}$$

设 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, 则

$$\|x-y\| > \varepsilon$$

但

$$\frac{\|x+y\|}{2} > 1 - \delta \quad (\forall \delta > 0)$$

故 $L[a, b]$ 不是一致凸的。

在 l 中, 取 $x = e_1, y = e_2, 0 < \varepsilon < 2$, 则

$$\|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| = 2 - \varepsilon$$

而

$$\frac{\|x+y\|}{2} = 1 > 1 - \delta \quad (\forall \delta > 0)$$

故 l 也不是一致凸的。

(iii) 证法一: 设 E 为一致凸空间, $x_n, x \in E, x_n \xrightarrow{w} x$, 且 $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$, 我们要证明 $x_n \xrightarrow{\text{强}} x$. 设不然, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 及 $\{n_k\}$, 使

$$\|x_{n_k} - x\| \geq \varepsilon_0$$

不妨设 $x \neq 0$ 及 $\|x_{n_k}\| = \|x\| = 1$, 据一致凸性, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon_0) > 0$, 使

$$\frac{\|x_{n_k} + x\|}{2} \leq 1 - \delta$$

又据Hahn—Banach定理, 存在 $f \in E^*$, 使

$$\|f\| = 1, f(x) = \|x\|, \quad \left| f\left(\frac{x_{n_k} + x}{2}\right) \right| \leq (1 - \delta)$$

但

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f\left(\frac{x_{n_k} + x}{2}\right) = f(x) = \|x\| = 1$$

矛盾, 故 $x_n \xrightarrow{\text{强}} x$.

证法二: 不妨设 $\|x\| = \|x_n\| = 1$ ($n = 1, 2, \dots$), 首先容易证明, 若 $2 - \|x + x_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 则 $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 现在 $x_n + x \xrightarrow{w} 2x$, 则

$$\begin{aligned} 2 = 2\|x\| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + x\| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|x_n + x\| \\ &\leq \|x\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 2 \end{aligned}$$

即 $\|x_n + x\| \rightarrow 2$ ($n \rightarrow \infty$), 故 $x_n \xrightarrow{\text{强}} x$.

38. 设 $\{x_n\}$ 是 Banach 空间 E 中的一个点列, 如果对于每个 $f \in E^*$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| < +\infty$$

则必存在正数 μ , 使对一切 $f \in E^*$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| \leq \mu \|f\|$$

证法一 令 $I = \{\alpha : \alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m), m \text{ 为任一自然数}, \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, 2, \dots, m\}$, $f \in E^*$, 令

$$g_\alpha(f) = f\left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i\right)$$

因为 $\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| < +\infty$, 所以 $g_\alpha \in E^{**}$, 且

$$\sup_{\alpha \in I} |g_\alpha(f)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| < +\infty \quad (\forall f \in E^*)$$

则据共鸣定理, 必存在正数 μ , 使

$$\sup_{\alpha} \|g_\alpha\| \leq \mu$$

不妨设 f 为实泛函, 取 $\varepsilon_i = \operatorname{sgn} f(x_i)$, ($f(x_i) \neq 0$), 并规定, $f(x_i) = 0$ 时, $\varepsilon_i = 1$, 则对任一自然数 m ,

$$g_\alpha(f) = \sum_{i=1}^m |f(x_i)| \leq \mu \|f\|$$

故

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| \leq \mu \|f\|$$

若 f 为复泛函, 则

$$f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$$

其中 φ 为实泛函, 且 $\|\varphi\| = \|f\|$, 从而可证

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| \leq \mu \|f\|$$

证法二 作算子序列 $T_n \in \mathcal{B}(E^*, l)$ 如下:

$$T_n f = \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), 0, \dots\} \quad (f \in E^*)$$

$$\sup_{n \geq 1} \|T_n f\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| < +\infty$$

则存在 $\mu > 0$, 使

$$\sup_n \|T_n\| \leq \mu$$

故

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N |f(x_n)| = \lim_{N \rightarrow \infty} |T_N f| \\ &\leq \mu \|f\| \quad (\forall f \in E^*) \end{aligned}$$

39. $\{x_n\}$ 同38, 则对每个 $f \in E^*$, $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|$ 收敛的充要条件是存在正数 μ , 使对一切自然数 m , 以及任意的 $\varepsilon_n = \pm 1$, 有

$$\left| \sum_{n=1}^m \varepsilon_n x_n \right| \leq \mu$$

证 必要性: 同上题, 令 $g_\alpha(f) = f\left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i\right)$, ($\varepsilon_i = \pm 1$), 则 $g_\alpha \in E^{**}$, 且

$$\|g_\alpha\| \leq \left| \sum_{n=1}^m \varepsilon_i x_i \right|$$

另一方面, 据Hahn—Banach延拓定理, 存在 $f \in E^*$, 使

$$f\left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i\right) = \left| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i \right|, \quad \|f\| = 1$$

所以

$$\|g_\alpha\| = \left| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i \right|$$

由38题知对任意的自然数 m 及 $\varepsilon_n = \pm 1$, 有

$$\left| \sum_{n=1}^m \varepsilon_n x_n \right| \leq \mu$$

充分性：设对任一自然数 m 及 $\varepsilon_n = \pm 1$ ($n = 1, 2, \dots, m$) 有

$$\left| \sum_{n=1}^m \varepsilon_n x_n \right| \leq \mu$$

$f \in E^*$, 我们取 $\varepsilon_n = \operatorname{sgn} f(x_n)$, 并规定 $f(x_n) = 0$ 时, $\varepsilon_n = 1$, 这里也设 f 是实泛函, 则

$$\sum_{i=1}^m |f(x_i)| = f\left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i\right) \leq \mu \|f\| \quad (\forall m)$$

从而

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| < +\infty$$

40, 求证上题中的条件等价于下列条件：存在 $\mu > 0$, 使对任意的一串自然数 $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ (这里 k 也是任意的), 有

$$\left| \sum_{i=1}^k x_{n_i} \right| \leq \mu$$

证 设条件 $\left| \sum_{i=1}^k x_{n_i} \right| \leq \mu$ 成立 (对一切 k 以及一切 $n_1 <$

$n_2 < \dots < n_k$), 则

$$\left| \sum_{n=1}^m \varepsilon_n x_n \right| \leq \left| \sum' x_n \right| + \left| \sum'' x_n \right| \leq 2\mu$$

这里 Σ' , Σ'' 分别表示对 $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n < 0$ 求和。

反之, 设条件 $\left| \sum_{n=1}^m \varepsilon_n x_n \right| \leq \mu$ 成立 (m 为任一自然数, $\varepsilon_n = \pm 1$), 则

$$\left| \sum_{i=1}^k x_{n_i} \right| = \frac{1}{2} \left| \sum_{n=1}^{n_k} (\varepsilon_n^{(1)} - \varepsilon_n^{(2)}) x_n \right| \leq \mu$$

其中 $\varepsilon_n^{(1)} = 1$, $\varepsilon_n^{(2)} = 1 (n \neq n_i)$, $\varepsilon_n^{(2)} = -1 (n = n_i)$ 。

41. 设 $\{f_n\}$ 是 Banach 空间 E 的共轭空间 E^* 中的点列,

则 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ 对每个 $x \in E$ 收敛的充要条件是对每个

$F \in E^{**}$, $\sum_{n=1}^{\infty} |F(f_n)|$ 收敛。

证 设对每个 $F \in E^{**}$, $\sum_{n=1}^{\infty} |F(f_n)| < +\infty$ 。因为

$$E \subset E^{**}, \quad x \longleftrightarrow x^{**} = Jx \in E^{**}$$

则对 $\forall x \in E$, 成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} |x^{**}(f_n)| < +\infty$$

反之, 设对每个 $x \in E$, $\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)| < +\infty$, 令

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i(x)$$

其中 m 为任一自然数, $\varepsilon_i = \pm 1$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 则 $\varphi_\alpha \in E^*$, 且

$$\sup_{\alpha} |\varphi_\alpha(x)| < +\infty \quad (\forall x \in E)$$

由共鸣定理得

$$\left\| \sum_{n=1}^m \varepsilon_n f_n \right\| = \|\varphi_\alpha\| \leq \mu$$

现任取 $F \in E^{**}$, 不妨设 F 为实泛函, 令 $\varepsilon_n = \operatorname{sgn} F(f_n)$ ($F(f_n) \neq 0$) ($n = 1, 2, \dots, m$), 并规定 $F(f_n) = 0$ 时, $\varepsilon_n = 1$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m |F(f_n)| &= \left| \sum_{n=1}^m \varepsilon_n F(f_n) \right| = \left| F\left(\sum_{n=1}^m \varepsilon_n f_n\right) \right| \\ &\leq \|F\| \mu \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} |F(f_n)| < +\infty$$

42. 在 $L^p[0, 1]$ ($1 < p < +\infty$) 中作一个弱收敛, 但不强收敛的点列。

解 不妨设 $[a, b] = [0, \pi]$, 在 $L^p[0, \pi]$ 中令

$$f_n(x) = (\operatorname{sgn} \sin nx) |\sin nx|^{\frac{2}{p}}$$

则

$$\|f_n\| = \left\{ \int_0^\pi \sin^2 nx \, dx \right\}^{-\frac{1}{p}} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{-\frac{1}{p}}$$

且容易证明对一切 $t \in [0, \pi]$ 有

$$\int_0^t f_n(x) dx \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

利用参考文献[2]p137例6立即知 $f_n \xrightarrow{w} 0$, 但 $f_n \not\xrightarrow{\text{强}} 0$.

43. 设 $f(t)$ 是 $[a, b]$ 上的可测函数, 如果对于任一 $g(t) \in L^q[a, b] (1 \leq q \leq +\infty)$, 有 $f(t)g(t) \in L[a, b]$, 则 $f(t) \in L^p[a, b]$ (当 $1 < q < +\infty$ 时, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; 当 $q = 1$ 时, $p = +\infty$; 当 $q = +\infty$ 时, $p = 1$).

证 设 $1 < q < +\infty$, 令

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t) & |f(t)| \leq n \text{ 时} \\ 0 & |f(t)| > n \text{ 时} \end{cases}$$

则

$$f_n(t) \in L^p[a, b] \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$$

作 $L^q[a, b]$ 上的线性泛函如下:

$$F_n(g) = \int_a^b g(t) f_n(t) dt \quad (\forall g \in L^q[a, b])$$

易知 $F_n \in (L^p[a, b])^*$, 且 $\|F_n\| = \|f_n\|_p$. 因为 $f(t) \in L[a, b]$,

故 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$. 又因为

$$|f_n(t)g(t)| \leq |f(t)g(t)| \in L[a, b]$$

由 Lebesgue 控制收敛定理立即知, 对每个 $g \in L^p[a, b]$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |F_n(g)| = \left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| < +\infty$$

故据共鸣定理可得

$$\|f_n\|_p \leq M \quad (M > 0 \text{ 为常数})$$

再由法杜定理可得

$$\left\{ \int_a^b |f(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leq M$$

即

$$f(t) \in L^p[a, b]$$

当 $q = 1$ 时, $p = +\infty$, 则由 $\|F_n\| = \|f_n\|_\infty \leq M$, 立即可得 $\|f\|_\infty \leq M$, 故亦有 $f(t) \in L^p[a, b]$ 。

当 $q = +\infty$ 时, 只需取 $g(t) = 1 \in L^\infty[a, b]$, 就有 $f(t) \in L[a, b]$ 。

44. 设 $\{\eta_n\}$ 为一数列, 若对一切 $x = \{\xi_n\} \in l^q (1 \leq q \leq \infty)$,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \xi_n$ 收敛, 则 $\{\eta_n\} \in l^p$ (这里的 p 与上题同)。

证 当 $q = +\infty$ 时, 显然有 $\{\eta_n\} \in l$ 。

当 $1 \leq q < +\infty$ 时, 令

$$F_n \longleftrightarrow \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, 0, \dots\} \in l^p$$

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k$$

由条件知对一切 $x = \{\xi_k\} \in l^q$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |F_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k \right| < +\infty$$

故当 $q > 1$ 时, 有

$$\|F_n\| = \left\{ \sum_{k=1}^n |\eta_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq M \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

当 $q = 1$ 时, 有

$$\|F_n\| = \sup_{1 \leq k \leq n} |\eta_k| \leq M \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

从而 $\{\eta_n\} \in l^p$.

45. 设数列 $\{a_n\} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 在 l 定义算子 T : $y = Tx$, 其中 $x = \{\xi_n\}$, $y = \{a_n \xi_n\}$, 证明 T 是全连续算子.

证 令 $T_n x = \{a_1 \xi_1, a_2 \xi_2, \dots, a_n \xi_n, 0, \dots\}$, 则 T_n 是 l 中的有穷秩算子, 任给 $\varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n| < \varepsilon$, 则 $n > N$ 时, 有

$$\|(T_n - T)x\| < \varepsilon \|x\|$$

故 $\|T_n - T\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, T 为全连续算子.

46. 设 M 为赋范线性空间 E 的闭子空间, 设 x_0 是 M 中某个弱收敛点列的极限, 则 $x_0 \in M$.

证 设 $x_0 \in \overline{M}$, 则 $d = \rho(x_0, M) > 0$, 由Hahn-Banach定理, 必存在 $f \in E^*$, 使

$$f(x_0) = d, \quad f(x) = 0 \quad (\forall x \in M)$$

但由条件存在 $x_n \in M$, $x_n \xrightarrow{w} x_0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) = 0$$

矛盾, 故 $x_0 \in M$.

47. 设 E, E_1 均为赋范线性空间, $S, T \in \mathcal{B}(E, E_1)$, 且 S, T 全连续, 证明 $\alpha S + \beta T$ 也是全连续的, 这里 α, β 是数.

本题直接据全连续算子定义即可得.

48. 设 E 是Banach空间, E_1, E_2 是 E 的闭子空间, 且 $E = E_1 + E_2$ ($E_1 + E_2$ 表示直接和, 定义见[2]p58), 证明存在 $M > 0$, 使得对一切 $x \in E$, 有

$$\|x_1\| \leq M\|x\|, \|x_2\| \leq M\|x\|$$

其中 $x_i \in E_i (i=1,2)$ 满足 $x = x_1 + x_2$ 。

证法一 在 $E = E_1 + E_2$ 中定义新范数

$$\|x\| = \|x_1\| + \|x_2\| \quad (x = x_1 + x_2 \in E)$$

容易证明 $(E, \|\cdot\|)$ 完备, 且

$$\|x\| = \|x_1 + x_2\| \leq \|x\|$$

则据 Banach 逆算子定理的推论, 存在 $K > 0$, 使对一切 $x \in E$, 有

$$K\|x\| \leq \|x\|$$

于是

$$\|x_i\| \leq \frac{1}{K} \|x\| \quad (i=1,2)$$

证法二 定义映射 $T_i: E = E_1 + E_2 \longrightarrow E_i$ 上 ($i=1, 2$) 如下,

$$T_i(x_1 + x_2) = x_i \quad (i=1,2)$$

则可以证明 T_i 是 E 到 E_i 的闭线性算子。由闭图象定理, T_i 有界 ($i=1,2$), 令 $M = \max(\|T_1\|, \|T_2\|)$, 则

$$\|x_i\| \leq M\|x\| \quad (i=1,2)$$

49. 设 E 为 Banach 空间, F 是 E 的闭子空间, 则自然同态映射 $E \longrightarrow E/F$ 将 E 的开单位球映为 E/F 的开单位球。

证 记 $E \longrightarrow E/F$ 的自然同态映射为 T , E 的开单位球为 S , $S = \{x \in E: \|x\| < 1\}$, 则 $x_0 \in S$ 时,

$$\|\tilde{x}_0\| = \|Tx_0\| = \inf_{x \in \tilde{x}_0} \|x\| \leq \|x_0\| < 1$$

故 T 将 E 的开单位球映为 E/F 的开单位球。

50. 设 E 为赋范线性空间, F 为 E 的闭子空间, 则 E 完

备的充分必要条件是 F 与 E/F 完备。

证 必要性：设 E 完备， F 完备显然，我们证明 E/F 也完备。任取 E/F 中的基本列 $\{\tilde{x}_n\}$ ，则存在子序列 $\{\tilde{x}_{n_k}\}$ ，使

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\tilde{x}_{n_{k+1}} - \tilde{x}_{n_k}\| < \infty$$

取定 $x_1 \in \tilde{x}_{n_1}$ ，必存在 $x_2 \in \tilde{x}_{n_2}$ ，使

$$\|x_2 - x_1\| \leq \|\tilde{x}_{n_2} - \tilde{x}_{n_1}\| + \frac{1}{2}$$

又因为对取定的 x_2 ，当 x_3 取遍 \tilde{x}_{n_3} 时， $x_3 - x_2$ 必取遍

$\tilde{x}_{n_3} - \tilde{x}_{n_2}$ ，故存在 $x_3 \in \tilde{x}_{n_3}$ ，使

$$\|x_3 - x_2\| \leq \|\tilde{x}_{n_3} - \tilde{x}_{n_2}\| + \frac{1}{2^2}$$

如此继续下去，可得序列 $\{x_k\} \subset E$ ，满足

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \|\tilde{x}_{n_{k+1}} - \tilde{x}_{n_k}\| + \frac{1}{2^k} \quad k=1,2,3,\dots$$

故 $\{x_k\}$ 是 E 中基本列。 E 完备，则 $x_n \longrightarrow x \in E$ ，令 \tilde{x} 为 x 所确定的类，则

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_n - \tilde{x}\| &\leq \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n_k}\| + \|\tilde{x}_{n_k} - \tilde{x}\| \\ &\leq \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n_k}\| + \|x_k - x\| \end{aligned}$$

故 $\tilde{x}_n \longrightarrow \tilde{x} \in E/F$ ， E/F 完备。

充分性：设 F ， E/F 均完备，则对任一 $x \in E$ ， $x + F$ 也是完备的。现任取 E 中基本列 $\{x_n\}$ ，易知 $\{\tilde{x}_n\}$ 是 E/F 中

的基本列, 由于 E/F 完备, 必存在 $\tilde{x} \in E/F$, 使 $\tilde{x}_n \longrightarrow \tilde{x} (n \rightarrow \infty)$ 。因为

$$\|\tilde{x}_n - \tilde{x}\| = \inf_{y \in \tilde{x}} \|x_n - y\| \longrightarrow 0 (n \rightarrow \infty);$$

则对每一个自然数 k , 存在 $x_{n_k} \in \tilde{x}_{n_k}$, $y_k \in \tilde{x}$, 使

$$\|x_{n_k} - y_k\| < \frac{1}{k}$$

于是

$$\begin{aligned} \|y_{k+p} - y_k\| &\leq \|y_{k+p} - x_{n_{k+p}}\| + \|x_{n_{k+p}} - x_{n_k}\| \\ &\quad + \|x_{n_k} - y_k\| \end{aligned}$$

故 $\{y_k\}$ 是 $x + F$ 中的基本列, $x + F$ 完备, 必存在 $y \in x + F$, 使 $y_k \longrightarrow y (k \rightarrow \infty)$ 。又

$$\|x_{n_k} - y\| \leq \|x_{n_k} - y_k\| + \|y_k - y\|$$

故 $x_{n_k} \longrightarrow y \in E$ 。但 $\{x_n\}$ 为 E 中基本列, 故必有 $x_n \longrightarrow y (n \rightarrow \infty)$, E 完备性得证。

51. 设 E 为复 Banach 空间, $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(E)$, 如果 T_1, T_2 可换, 则

$$r(T_1 + T_2) \leq r(T_1) + r(T_2)$$

其中 $r(T)$ 为 T 的谱半径。

证 因为 $r(T_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_i^n\|^{\frac{1}{n}} (i=1,2)$, 则对任给的

$\varepsilon > 0$, $\frac{\|T_i^n\|}{(r(T_i) + \varepsilon)^n}$ 是有界数列 ($i=1,2$), 故存在常数 $M_\varepsilon >$

0, 使得对一切自然数 n , 有

$$\|T_i^n\| \leq M_\varepsilon (r(T_i) + \varepsilon)^n \quad (i=1,2)$$

$$\begin{aligned}\|(T_1 + T_2)^n\| &= \left\| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T_1^k T_2^{n-k} \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \|T_1^k\| \cdot \|T_2^{n-k}\| \\ &\leq M_\varepsilon^2 [r(T_1) + r(T_2) + 2\varepsilon]^n\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(T_1 + T_2)^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(T_1) + r(T_2) + 2\varepsilon$$

又因为 $\varepsilon > 0$ 是任取的, 故

$$r(T_1 + T_2) \leq r(T_1) + r(T_2)$$

52. 试证由 l^2 到 l^1 的有界线性算子是全连续算子。

证 因为 l^2 可分, 自共轭, 据 [2] 定理 4.9, $S = \{x \in l^2, \|x\| \leq 1\}$ 必 * 弱列紧, 即存在 $\{x_n\} \subset S$, 使

$$x_n \xrightarrow{*w} x \iff x_n \xrightarrow{w} x$$

T 是有界线性算子, 则

$$Tx_n \xrightarrow{w} Tx$$

由于 l^1 中弱收敛等价于强收敛, 故 $Tx_n \xrightarrow{S} Tx$, 从而 T 必是全连续线性算子。

53. 设 E, E_1 均为赋范线性空间, $T \in \mathcal{B}(E, E_1)$, 若 T^* 是全连续的, 则 T 也是全连续的。

证 因为 $T^{**} \in \mathcal{B}(E^{**}, E_1^{**})$ 是全连续算子, 而 $x \in E$ 时, 有

$$Tx = T^{**}x$$

故 T 也是全连续算子。

54. 乘法算子 $Tx(t) = a(t)x(t)$ 在空间 $C[a, b]$ 上能是全连续算子吗? 这里 $a(t)$ 是给定的于 $[a, b]$ 上连续的函数。

解 因为 $a(t) \in C[a, b]$, 我们令

$$m = \min_{t \in [a, b]} a(t), \quad M = \max_{t \in [a, b]} a(t)$$

则 $a(t)$ 的值域为区间 $[m, M]$, 容易证明 $\sigma(T) = [m, M]$, 故 T 不可能是全连续算子。

55. 乘法算子 $Tx(t) = a(t)x(t)$ 在空间 $L^2[a, b]$ 上能是全连续算子吗? 这里 $a(t)$ 是给定的 $[a, b]$ 上的有界可测函数。

解 不妨设 $a(t)$ 不对等于零, 若 T 为全连续算子, 则必存在 $\lambda_0 \neq 0$, 使得集合 $E(t \in [a, b]: a(t) = \lambda_0)$ 的测度大于零, 因为否则对一切 $\lambda \neq 0$, $mE(t \in [a, b]: a(t) = \lambda) = 0$, 就可推出 λ 不是 T 的特征值, 从而必属于正则集, 故 $\sigma(T) = \{0\}$, $T = 0$, 矛盾。当 $mE(t \in [a, b]: a(t) = \lambda_0) > 0$ 时, λ_0 必是 T 的特征值, 且 T 对应于 λ_0 的特征向量空间是无穷维的, 这与 T 为全连续矛盾, 故 T 不是全连续算子。

56. 试证按公式 $Jx = x$ 作用的嵌入算子 $J: C^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ 是全连续算子, 这里 $C^1[0, 1]$ 中的范数规定为

$$\|x\| = \max_{t \in [0, 1]} |x'(t)| + \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|$$

证 设 A 为 $C^1[0, 1]$ 中任一有界集, 则存在常数 $K > 0$, 使得 $x \in A$ 时, 有

$$\max_{t \in [0, 1]} |x(t)| \leq K, \quad \max_{t \in [0, 1]} |x'(t)| \leq K$$

则 JA 是 $C[0, 1]$ 中有界集, 且等度连续, 故 JA 是 $C[0, 1]$ 中的列紧集, 于是 J 是全连续算子。

57. 设 T 为赋范线性空间 E 中的有界线性算子, 试证明

$$\|T\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Tx\|$$

58. 设 E, E_1 为 Banach 空间, $A: D(A) \subset E \rightarrow E_1$ 是闭线性算子, 若在 $\mathcal{D}(A)$ 中定义新范数

$$\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|, x \in \mathcal{D}(A)$$

则 $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A)$ 是一个 Banach 空间。

59. 设 E 为无穷维赋范线性空间, f 是 E 上的不连续线性泛函, $B = \{x \in E: |f(x)| \leq 1\}$, 证明 B 无内点。

60. 在数列空间 C 中, 令

$$\|x\| = \sup\{|x_{n-1} - x_n|: n = 1, 2, \dots\}$$

其中 $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\} \in C$, 并规定 $x_0 = 0$, 证明 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 为 C 上的不连续线性泛函。

61. 设 X 为 Banach 空间, $L \subset X$ 是闭子空间, $x_0 \in X$, $\rho(x_0, L) = d > 0$, 证明 $L_0 = \{\alpha x_0 + y: y \in L, \alpha \in \text{数域 } K\}$ 是 X 的闭子空间。

提示: 设 $z_n = \alpha_n x_0 + y_n \in L_0$, $z_n \rightarrow z_0 (n \rightarrow \infty)$, 因为 $\overline{x_0} \in L$, 应用 Hahn—Banach 定理推论, 证明 $\{\alpha_n\}$ 收敛, 从而 $\{y_n\}$ 也收敛。

62. 设 X 为赋范线性空间, $f, g \in X^*$, 则 $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$ 的充要条件是存在 $\lambda \neq 0$, 使得 $f = \lambda g$, 这里 $\text{Ker}(f)$ 表示 f 的零空间。

提示 只须证明必要性, 并且可不妨设 $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g) \neq X$. 取 $x_0 \in X - \text{Ker}(f)$, 令 $\lambda_0 = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$, 证明 $f(x) = \lambda_0 g(x)$.

[注] 我们还可以证明, 若对某个常数 $C \neq 0$, 超平面 $f(x) = C$ 与超平面 $g(x) = C$ 一致, 则必有 $f(x) \equiv g(x)$ 。

63. 设 X 为赋范线性空间, S 为 X 的极大真闭子空间, 证明存在 X 上的线性泛函 f (不一定有界), 使得 $\text{Ker}(f) = S$ 。

提示 任取 $x_0 \in X - S$, 证明 X 等于由 $S \cup \{x_0\}$ 张成的闭子空间, 则对任一 $x \in X$, 存在 $s \in S$ 以及 $\lambda_0 \in$ 数域 K , 使得 $x = s + \lambda_0 x_0$, 定义

$$f(x) = \lambda_0 \quad (x \in X)$$

64. 设 X 为 Banach 空间, $B = \{x_k\} \subset X$, 若由 B 张成的子空间在 X 中稠密, 则

$$(1) \quad d(f_1, f_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_1(x_k) - f_2(x_k)|}{2^k(\|x_k\| + 1)} \text{ 是 } X^* \text{ 上的一个距离;}$$

(2) 由 X^* 的 $*$ 弱收敛可推出按距离 d 收敛;

(3) 令 $S = \{f \in X^*: \|f\| \leq 1\}$, 则 S 是距离空间 (X^*, d) 中的紧集。

提示 (3) 利用结论 (2) 只须证明对每一个序列 $\{f_n\} \subset S$, 存在子序列 $f_{n_k} \xrightarrow{*w} f \in S$ 。

65. 设 E, E_1 均为赋范线性空间, 则 $\mathcal{B}(E, E_1)$ 完备的充分必要条件是 E_1 完备。

提示 必要性, 设 $\{y_n\}$ 是 E_1 中的任一基本点列, 取 $x_0 \in E, \|x_0\| = 1, f \in E^*$, 使 $f(x_0) = \|x_0\|$, 定义算子序列 $T_n \in \mathcal{B}(E, E_1)$ 如下:

$$T_n x = f(x) y_n \quad (x \in E)$$

证明 $\{T_n\}$ 是 $\mathcal{B}(E, E_1)$ 中的基本列。

66. 设 $C_0 = \left\{ \{x_n\}: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \right\}$, 规定 $\|x\| = \sup_n |x_n|$, 映射 $T: C_0 \longrightarrow C_0$:

$$Tx = \left\{ \frac{x_n}{n} \right\}$$

则 $\|T\| = 1$, $R(T) \neq C_0$, $\overline{R(T)} = C_0$, 并求出 T^* .

答 $T^*: l \longrightarrow l$,

$$T^*(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots).$$

67. 设 E, E_1 均是赋范线性空间, $T \in \mathcal{B}(E, E_1)$, 证明 T^* 是一对一的充分必要条件是 $\overline{R(T)} = E_1$.

68. 设 E, E_1 均是 Banach 空间, $T \in \mathcal{B}(E, E_1)$, T^{-1} 存在有界, 证明 T^* 是一对一的充分必要条件是 $R(T) = E_1$.

69. 设 $T: C \longrightarrow C$, $x = \{x_n\} \in C$ 时, $Tx = \left\{ \frac{x_n}{n} \right\}$, 试求出 T^* 的零空间。

答 T^* 的零空间为 $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$ 张成的一维子空间。

70. 设 E 为自反 Banach 空间, 则对任一 $f \in E^*$, 泛函数 $|f(x)|$ 在 E 的单位球面上可取到最大值。

71. 设 X 为 Banach 空间, 集合 $E \subset X^*$, E 张成的子空间在 X^* 中稠密, 又设 $\{x_n\} \subset X$, $\sup_n \|x_n\| < \infty$, 且对一切

$f \in E$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$, 证明 x_n 弱收敛于 x 。

72. 设 X 为 Banach 空间, $A_n, T \in \mathcal{B}(X)$, T 为紧算子, 且 A_n 强收敛于零, 证明 $A_n T$ 一致收敛于零。

73. 设 φ 是有限测度空间 (X, μ) 上的 a.e 有限可测函数, $\mathcal{D} = \{ f \in L^2(X; \mu) : \varphi \cdot f \in L^2(X; \mu) \}$, 则 $T: \mathcal{D} \rightarrow L^2(X; \mu)$, $Tf = \varphi \cdot f (f \in \mathcal{D})$ 是稠定闭线性算子。

74. 设 $g(t) \in C[0, 1]$, 在 $C[0, 1]$ 上定义 $f(x) = \int_0^1 x(t) \cdot g(t) dt (x(t) \in C[0, 1])$, 证明 $f \in C^*[0, 1]$ 且

$$\|f\| = \int_0^1 |g(t)| dt$$

75. 设 E 是赋范线性空间, $\{x_n\} \subset E$, K 为数域, $\{a_n\} \subset K$, 则存在 $f \in E^*$ 使得成立

$$(i) f(x_i) = a_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots);$$

$$(ii) \|f\| \leq M$$

其充分必要条件是对于 K 中任意的 t_1, t_2, \dots, t_n 成立

$$\left| \sum_{i=1}^n t_i a_i \right| \leq M \left\| \sum_{i=1}^n t_i x_i \right\|$$

这里 n 为任一自然数。

提示 令

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i x_i : t_i \in K, i = 1, 2, \dots, n; n \text{ 为任一自然数} \right\}$$

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^n t_i a_i \quad (x \in B)$$

应用 Hahn—Banach 延拓定理立即得本题充分性。

76. 设 E 为 Banach 空间, E_1, E_2 为 E 的闭子空间, $E = E_1 \dot{+} E_2$, 如果 $x \in E$ 时, $x = x_1 + x_2$, 其中 $x_1 \in E_1$,

$x_1 \in E_1$, 我们令 $Px = x_1$.

(i) 试证明 P 是 $E \rightarrow E_1$ 上的有界线性算子, 且满足 $P^2 = P$;

(ii) 求算子 P 的点谱, 连续谱和剩余谱;

(iii) 证明 $\lambda \neq 0, 1$ 时, $R(\lambda; P) = \frac{1}{\lambda}I - \frac{1}{\lambda(\lambda-1)}P$.

77. 设 X 是 Banach 空间, G 是 X 的闭子空间, T 是由 G 到有界数列空间 m 的有界线性算子, 则 T 一定可以延拓为 X 到 m 的有界线性算子 \tilde{T} , 且满足 $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

提示 设 $Tx = (\xi_i)$, $x \in G$, 作 G 上的有界线性泛函 $f_i(x) = \xi_i (i = 1, 2, \dots)$, 应用 Hahn—Banach 定理立即可得。

78. 设 X 是 Banach 空间, $T \in \mathcal{B}(X)$, $R(T) = l^1$, 则 X 有子空间 M , 使它满足下面的性质:

(i) 有 M 到 l^1 上的双向连续的线性算子;

(ii) 有 X 到 M 的有界投影算子 $P (P^2 = P)$ 。

79. 设 X 为 Banach 空间, $p(x)$ 是定义在 X 上的泛函, 满足条件:

(i) $p(x) \geq 0$; $\alpha > 0$ 时, $p(\alpha x) = \alpha p(x)$;

(ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$;

(iii) 若 $x \in X$, $x_n \in X$, $x_n \rightarrow x$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n) \geq p(x)$ 。

证明必存在 $M \geq 0$, 使得对一切 $x \in X$ 成立

$$p(x) \leq M \cdot \|x\|$$

提示 令 $M_k = \{x \in X: p(x) \leq k\}$, 证明 M_k 是闭集, 并应用 Baire 纲定理。

80. 设 f 是赋范线性空间 E 上的线性泛函, 则 f 连续的充分必要条件是 $\text{Ker}(f)$ 为 E 的闭子空间。

提示 充分性, 不妨设 $f \neq 0$, 任给 $\varepsilon > 0$, 取 $x_0 \in E$, 使 $f(x_0) = \varepsilon$, 考察集合

$$\text{Ker}(f) + x_0 = \{x_0 + x: x \in \text{Ker}(f)\}$$

利用 $0 \in \overline{\text{Ker}(f) + x_0}$, 证明 $f(x)$ 在 0 点连续。

81. 试求下列作用于 (实) l^1 的算子 T 的共轭算子:

$$(i) \quad T(x_1, x_2, \dots) = (0, 0, \dots, \underbrace{x_1, 0, \dots}_n);$$

$$(ii) \quad T(x_1, x_2, \dots) = (\alpha_n x_n, \alpha_{n+1} x_{n+1}, \dots), \quad |\alpha_n| \leq 1, \\ n = 1, 2, \dots.$$

答 (i) $T^*: l^\infty \longrightarrow l^\infty,$

$$T^*(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) = (0, \dots, 0, \underbrace{y_n}_n, 0, \dots).$$

(ii) $T^*: l^\infty \longrightarrow l^\infty,$

$$T^*(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) = (0, \dots, 0, \underbrace{\alpha_n y_1, \alpha_{n+1} y_2, \dots}_n).$$

82. 设 E 为 Banach 空间, G, H 为 E 的闭子空间, $G \cap H = \{0\}$, 则 $G + H = \{x + y: x \in G, y \in H\}$ 是闭子空间的充分必要条件是存在 $\alpha > 0$, 使得对一切 $x \in G, y \in H$, 有

$$\|x\| \leq \alpha \|x + y\|$$

提示 必要性, 作映射 $T: G + H \longrightarrow G$ 如下:

$$T(x + y) = x$$

应用闭图象定理。

83. 设 $E, E_\alpha (\alpha \in \mathcal{A})$ 是一族 Banach 空间, 记 $Y = \{(y_\alpha): y_\alpha \in E_\alpha, \sup_\alpha \|y_\alpha\| < \infty\}$, 在 Y 中规定线性运算同

R^n , 范数 $\|(y_\alpha)\| = \sup_\alpha \|y_\alpha\|$, 试证明

(i) Y 是一个 Banach 空间;

(ii) 设 $T_\alpha \in \mathcal{B}(E, E_\alpha)$, ($\alpha \in \mathcal{A}$), 若对一切 $x \in E$, $\sup_\alpha \|T_\alpha x\| < \infty$, 令 $Tx = (T_\alpha x)$, 则 T 是 $E \longrightarrow Y$ 中的有界线性算子。

提示 (ii) 作算子 $\tilde{T}_\alpha \in \mathcal{B}(E, Y)$, $\alpha \in \mathcal{A}$,

$$\tilde{T}_\alpha x = (y_\beta)$$

这里 $\beta \in \mathcal{A}$, 当 $\beta = \alpha$ 时, $y_\beta = T_\alpha x$, 当 $\beta \neq \alpha$ 时, $y_\beta = 0$, 应用共鸣定理。

本题也可以先证明 T 是闭线性算子, 再应用闭图象定理来证明。

84. 设 $X = \{(\xi_n): \xi_n \text{ 均为实数, 且只有有限个 } \xi_n \neq 0\}$, $x \in X$, $\|x\| = \sup_n |\xi_n|$, 令 $T: X \longrightarrow X$, $y = Tx = (\frac{\xi_n}{n})$, 证明 T 是 $X \longrightarrow X$ 上的一对一线性算子, 但 T^{-1} 无界。

85. 设 X 为多项式全体, $x(t) \in X$, $x(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ 时, 规定 $\|x\| = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$, 证明 X 不是完备的赋范线性空间。

86. 设 X 和 Y 是 Banach 空间, T 是 $X \longrightarrow Y$ 中的一对一有界线性算子, 证明 $T^{-1}: R(T) \longrightarrow X$ 上是有界的充分必要条件是 $R(T)$ 为 Y 中的闭集。

87. 设 E 是赋范线性空间 (不一定完备), $f_n \in E^*$, $\|f_n\| \leq M$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 则 $A = \{x \in E: \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ 存在}\}$ 是 E 的闭子空间。

88. 设 X 为 Banach 空间, $T \in \mathcal{B}(X)$, 若 $R(T)$ 为闭子空间, 证明对一切 $y \in R(T)$, 存在一个 x , 使 $y = Tx$ 以及 $\|x\| \leq M\|y\|$, 其中 M 是与 $y \in R(T)$ 无关的常数。

提示 视 T 为 $X \rightarrow R(T)$ 上的有界线性算子, 应用开映射定理。也可以利用商空间和 Banach 逆算子定理来证明。

89. 设 $T_0: C_0 \rightarrow l^2$, $x = \{\xi_k\} \in C_0$, $Tx = \{\frac{\xi_k}{k}\}$, 定义 T 为 T_0 从 $C_0 \rightarrow E_1 = R(T_0)$ 上的算子, 证明存在紧算子序列 $T_n \in \mathcal{B}(C_0, E_1)$, 使得 T_n 一致收敛于 T , 但 T 非紧。

90. 设 E 为 Banach 空间, 具有有界逼近性质, 即存在有穷秩算子序列 $\{S_n\} \subset \mathcal{B}(E)$, 使 S_n 强收敛于 I , 试证明

(i) 对任一紧算子 $T \in \mathcal{B}(E)$, 必存在有穷秩算子序列 $\{T_n\} \subset \mathcal{B}(E)$, 使得 T_n 一致收敛于 T ;

(ii) 如果 E 具有可数基, 则对任一紧算子 $T \in \mathcal{B}(E)$, 必存在有穷秩算子序列 $\{T_n\}$, 使得 T_n 一致收敛于 T 。

提示 (ii) 在 E 中引进新范数

$$\|x\| = \sup_m \left\| \sum_{i=1}^m \xi_i e_i \right\|$$

其中 $\{e_i\}$ 为 E 的可数基, $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$. 证明 $E_1 =$

$(E, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间, 利用 Banach 逆算子定理证明

$T_n x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$ 是一个有界线性算子。

91. 设 X 为可分的 Banach 空间, 则 X 的共轭空间 X^* 为

* 弱可分的。

提示 应用本章第64题可证明 X^* 中任一有界集的*弱拓扑等价于 (X^*, d) , 由 $X^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, 其中 $S_n = \{f \in X^*: \|f\| \leq n\}$, 立即可得 X^* 是*弱可分的。

92. 设 A 是Banach空间 X 中的一个线性算子, $\rho(A) \supset (0, +\infty)$, 若存在常数 $M > 0$, 使对一切自然数 n 以及 $\lambda > 0$ 有

$$\|\lambda^n R(\lambda; A)^n\| \leq M$$

则存在 X 上的一个范数 $\|\cdot\|$, 使得对一切 $x \in X$, 有

$$\|x\| \leq \|x\| \leq M\|x\|$$

以及

$$\|\lambda R(\lambda; A)x\| \leq \|x\| \quad (\lambda > 0)$$

提示 先令

$$\|x\|_{\mu} = \sup_{n \geq 0} \|\mu^n R(\mu; A)^n x\| \quad (\mu > 0)$$

证明 $\|x\|_{\mu}$ 关于 $\mu > 0$ 单调上升有界, 然后再令

$$\|x\| = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \|x\|_{\mu}$$

第六章 希尔伯特空间及其算子

一、基本概念和主要定理

内积和希尔伯特空间 设 X 是复数域 C 上的线性空间, 若映射 $(x, y): X \times X \longrightarrow C$ 满足

$$(i) (x, x) \geq 0, \text{ 当且仅当 } x = 0 \text{ 时 } (x, x) = 0;$$

$$(ii) (x, y) = \overline{(y, x)};$$

$$(iii) (x + y, z) = (x, z) + (y, z);$$

$$(iv) (\lambda x, y) = \lambda(x, y), \lambda \in C$$

则称 (x, y) 为元素 x 和 y 的内积, X 称作复内积空间, 简称为内积空间。对内积空间 X , 若规定 x 的范数为 $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, 则 X 为赋范线性空间, 如果 X 按范数 $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ 是完备的, 则称它为完备内积空间。一个可分的无穷维完备内积空间称作希尔伯特(Hilbert)空间, Hilbert空间常用字母 H 来表示。请读者注意, 有些书上称完备内积空间为Hilbert空间。

标准直交系 设 X 为内积空间, $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset X$, 如果

$$(e_\alpha, e_{\alpha'}) = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \alpha' \\ 1, & \alpha = \alpha' \end{cases}$$

则称 $\{e_\alpha\}$ 为 X 中的标准直交系。可以证明 $C_\alpha = (x, e_\alpha)$ 中至多可列个不等于零。

设 $\{e_n\} \subset X$ 为 X 的可列标准直交系, $x \in X$, 称 $C_n =$

$(x, e_n) (n = 1, 2, \dots)$ 为 X 关于 e_n 的 Fourier 系数。

完备标准直交系和完全标准直交系 设 $\{e_n\}$ 是内积空间 X 中的标准直交系, 若对一切 $x \in X$, Parseval 等式

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$$

成立, 则称 $\{e_n\}$ 为完备系; 若对一切 n , $(x, e_n) = 0$ 就可推出 $x = 0$, 则称 $\{e_n\}$ 是完全系。对于 Hilbert 空间 H , $\{e_n\}$ 完备等价于 $\{e_n\}$ 完全, 对一般内积空间 X , $\{e_n\}$ 完备必完全, 但反过来不一定成立。 H 的可分性是 H 中存在至多可列个完备标准直交系的充分必要条件。

正交性与射影定理 设 H 为 Hilbert 空间, $x, y \in H$, 若 $(x, y) = 0$, 则称 x 与 y 正交; 设 $L \subset H$ 为子空间, 若对任意的 $y \in L$, $(x, y) = 0$, 则称 x 与子空间 L 正交, 记作 $x \perp L$; H 中与 L 正交的元素全体叫做 L 的直交补, 记为 L^\perp 。

定理 1 (直交分解) 设 M 为 Hilbert 空间 H 的闭子空间, 则对任一 $x \in H$, 存在唯一元素 $y \in M$ 和 $z \in M^\perp$, 使得

$$x = y + z$$

元素 y 称作 x 在子空间 M 上的射影, 此时, 我们记

$$H = M \oplus M^\perp$$

称 H 为子空间 M 和 M^\perp 的直交和。

定理 2 设 $\{e_n\}$ 为 Hilbert 空间 H 中的标准直交系, 则下列条件等价:

(i) $\{e_n\}$ 是 H 中的完备系;

(ii) 对任一 $x \in H$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$ (Fourier 展式);

(iii) 对所有 $x, y \in H$, $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)(e_n, y)$.

定理 3 (Riesz 表现定理) 设 X 为完备内积空间, 则对任一 $f \in X^*$, 存在唯一元素 $u \in X$, 使对一切 $x \in X$, 有

$$f(x) = (x, u)$$

以及

$$\|f\| = \|u\|$$

(Hilbert) 共轭算子 T^* 设 X 为完备内积空间, $T \in \mathcal{B}(X)$, 取定 $y \in X$, 则 (Tx, y) 是 $x \in X$ 的有界线性泛函, 故存在唯一元素 $u \in X$, 使

$$(Tx, y) = (x, u)$$

记

$$T^*y = u$$

并称 T^* 为 T 的 (Hilbert) 共轭算子。显然 $T^* \in \mathcal{B}(X)$, $\|T^*\| = \|T\|$.

自伴算子、正算子和直交投影算子 设 X 为完备内积空间, $T \in \mathcal{B}(X)$, 若 $T = T^*$, 则称 T 为自伴算子。易知 $T = T^*$ 等价于 $(Tx, y) = (x, Ty)$ 对一切 $x, y \in X$ 成立。对自伴算子 T , 有 $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)|$.

设 X 为复的完备内积空间, 若对一切 $x \in X$, 有

$$(Tx, x) \geq 0$$

则称 T 为正算子, 记作 $T \geq 0$; 设 $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(X)$, 自伴, 若 $T_1 - T_2 \geq 0$, 则称 $T_1 \geq T_2$; 设 $\{T_n\} \subset \mathcal{B}(X)$ 为自伴算子序列, 若 $T_n \leq T_{n+1}$ ($T_n \geq T_{n+1}$), $n = 1, 2, \dots$, 则称 $\{T_n\}$ 单调上升 (单调下降)。

设 X 为完备内积空间, L 为 X 的闭子空间, 根据直交分

解定理, 对任一 $x \in X$, 存在唯一分解

$$x = x_1 + x_2$$

其中 $x_1 \in L$, $x_2 \in L^\perp$, 我们令

$$Px = x_1$$

则 P 为定义在 X 上的有界线性算子, 称 P 为 L 上的正交投影算子, 简称为投影算子。易知 P 为投影算子的充要条件是 P 自伴且 $P^2 = P$ 。

正常算子、酉算子和等距算子 设 $T \in \mathcal{B}(H)$, 若 $T^*T = TT^*$, 则称 T 为正常算子或称 T 为正规算子; 若 $T^*T = TT^* = I$, 则称 T 为酉算子; 若对任一 $x \in H$ 有 $\|Tx\| = \|x\|$, 则称 T 为等距算子。一个酉算子必是正常算子和等距算子。

近似点谱 设 $T \in \mathcal{B}(H)$, 我们称集合

$$\sigma_a(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \text{存在 } x_n \in H, \|x_n\| = 1, \\ \text{使得 } \|(\lambda I - T)x_n\| \longrightarrow 0\}$$

为 T 的近似点谱。易知

$$\sigma_a(T) \subset \sigma(T), \sigma_p(T) \cup \sigma_o(T) \subset \sigma_a(T)$$

收敛性 设 $\{x_n\} \subset H$, 若 $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$, 则称 $\{x_n\}$ 强收敛于 x ; 若对任一 $y \in H$, $(x_n, y) \longrightarrow (x, y)$, 则称 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x 。在 $\mathcal{B}(H)$ 中可以定义三种收敛性: 设 $\{T_n\} \subset \mathcal{B}(H)$, $T \in \mathcal{B}(H)$

(i) 若 $\|T_n - T\| \rightarrow 0$, 则称 $\{T_n\}$ 一致收敛于 T , 记作 $T_n \Rightarrow T$;

(ii) 若对每个 $x \in H$, $\|T_n x - Tx\| \longrightarrow 0$, 则称 $\{T_n\}$ 强收敛于 T , 记作 $T_n \xrightarrow{s} T$;

(iii) 若对任意的 $x, y \in H$, $(T_n x, y) \longrightarrow (Tx, y)$,

则称 $\{T_n\}$ 弱收敛于 T , 记作 $T_n \xrightarrow{w} T$.

定理 4 设 $\{T_n\}$ 为完备内积空间 X 中的单调自伴算子序列, 且 $\|T_n\| \leq K$ 对一切 n 成立, 则存在唯一的自伴算子 T , 使 $\{T_n\}$ 强收敛于 T .

定理 5 设 $T \in \mathcal{B}(X)$, $T \geq 0$, 则存在唯一的正算子 S 使 $S^2 = T$, 并称 S 为 T 的正平方根, 记为 $S = T^{\frac{1}{2}}$.

谱族(单位分解)和有界自伴算子的谱分解定理 设 $\{E_\lambda\}$ 是Hilbert空间 H 上的一族投影算子, λ 为实参数, 若 E_λ 满足

(i) 单调性: $\lambda < \mu$ 时, $E_\lambda \leq E_\mu$;

(ii) 右连续性: 对任一 $x \in H$, 有 $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0 + 0} E_\lambda x = E_{\lambda_0} x$;

(iii) 存在有限实数 a 和 b ($a < b$), 使得 $\lambda < a$ 时, $E_\lambda = 0$, $\lambda \geq b$ 时, $E_\lambda = I$

则称 $\{E_\lambda\}$ 为 $[a, b]$ 上的谱族或单位分解。

定理 6 设 $T \in \mathcal{B}(H)$, 自伴, 则由算子 T 可产生一个 $[m, M]$ 上的谱族 $\{E_\lambda\}$ ($m = \inf_{\|x\|=1} (Tx, x)$, $M = \sup_{\|x\|=1} (Tx, x)$), 使

$$T = \int_{m-0}^M \lambda dE_\lambda$$

积分在算子范数意义下收敛, 且 E_λ 和任一与 T 可换的有界线性算子可换。

定理 7 设 $T \in \mathcal{B}(H)$, 自伴, 则

(i) $\rho(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C}: \lambda \text{ 是非实数} \} \cup \{ \lambda \in \mathbb{R}: \lambda \in [m, M] \} \cup \{ \lambda \in [m, M]: \text{存在某个区间} [\alpha, \beta], \text{使} \alpha \leq \lambda \leq \beta, \text{且}$

E_λ 在 $[\alpha, \beta]$ 上取常值};

(ii) $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$ 的充要条件是 $E\lambda_0 \neq E\lambda_0 - 0$, 且对应于 λ_0 的特征向量空间 L_{λ_0} 等于 $E\lambda_0 - E\lambda_0 - 0$ 的值域;

(iii) $\sigma_r(T) = \phi$;

(iv) $\lambda_0 \in \sigma_o(T)$ 的充要条件是 $E\lambda_0 = E\lambda_0 - 0$, 且对任何满足 $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$ 的实数 λ_1 和 λ_2 有 $E\lambda_1 \neq E\lambda_2$.

定理 8 设 $T \in \mathcal{B}(H)$ 是全连续自伴算子, 则在算子范数意义下, T 可表成下列级数:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n E_n$$

其中 λ_n 是 T 的非零特征值, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq \dots$, E_n 是 T 对应于 λ_n 的特征向量空间 L_n (有限维)上的投影算子。

二、例题、习题与解法

1. 证明 $(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$, 当 K 为实数域时; $(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$, 当 K 为复数域时。

本题直接利用 $\|x\|^2 = (x, x)$ 代入验证, 故略。

2. 设 M, N 为内积空间 U 中的子集, 且 $M \perp N$, 证明 $N \subset M^\perp, M \subset N^\perp$.

证 因为 $M^\perp = \{x: (x, y) = 0, \forall y \in M\}$, $N \perp M$, 所以 $N \subset M^\perp, M \subset N^\perp$.

3. 设 M, N 是内积空间 U 中的子集, $M \subset N$, 则 $N^\perp \subset M^\perp$.

证 任取 $x \in N^\perp$, 则对一切 $y \in N$ 有 $(x, y) = 0$, 利用条

件 $M \subset N$ ，必可得对一切 $y \in M$ ，有 $(x, y) = 0$ ，所以 $x \in M^\perp$ ，即

$$N^\perp \subset M^\perp$$

4. 设 U 是完备的内积空间， M 是 U 的子空间，证明 $\overline{M} = (M^\perp)^\perp$ ， $M^\perp = (\overline{M})^\perp$ 。

证 因为 $M \subset \overline{M}$ ，由本章第3题得 $\overline{M}^\perp \subset M^\perp$ ，反之容易证明若 $x \in M^\perp$ ，必有 $x \perp \overline{M}$ ，即 $M^\perp \subset \overline{M}^\perp$ ，故 $M^\perp = (\overline{M})^\perp$ 。

下面证明 $\overline{M} = (M^\perp)^\perp$ 。 $\overline{M} \subset (M^\perp)^\perp$ 显然成立，反之，对每一个 $x \in (M^\perp)^\perp$ ，分解 $x = y + z$ ，其中 $y \in \overline{M}$ ， $z \in \overline{M}^\perp = M^\perp$ ，则

$$0 = (x, z) = (z, z)$$

故

$$x = y \in \overline{M}, (M^\perp)^\perp \subset \overline{M}$$

从而 $\overline{M} = (M^\perp)^\perp$

本题中 $\overline{M} = (M^\perp)^\perp$ 也可应用直交分解 $U = M^\perp \oplus (M^\perp)^\perp$ ， $U = \overline{M} \oplus \overline{M}^\perp = M^\perp \oplus \overline{M}$ ，从而知 $\overline{M} = (M^\perp)^\perp$ 。

5. ~~设 L_1, L_2 是完备内积空间 U 的子空间， $L_1 \perp L_2$ ， $L = L_1 \oplus L_2$ ，证明 L 是闭子空间的充分必要条件是 L_1, L_2 均为闭子空间。这里 $L_1 \oplus L_2$ 表示 L_1 和 L_2 的直交和。~~

证 必要性：设 L 为闭子空间， $\{x_n\} \subset L_1$ ， $x_n \longrightarrow x$ ($n \longrightarrow \infty$)，则 $x \in L$ ，且对一切 $y \in L_2$ ，有

$$(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y) = 0$$

所以 $x \in L_2^\perp$ 因为

$$L = L_1 \oplus L_2, x \in L, x \in L_2^\perp$$

故 $x \in L_1$, L_1 为闭子空间。

同理可证 L_2 是闭子空间。

充分性：设 L_1, L_2 均为闭子空间, $\{x^{(n)}\} \subset L$, $x^{(n)} \longrightarrow x (n \longrightarrow \infty), x \in U$, 令

$$x^{(n)} = x_1^{(n)} + x_2^{(n)}$$

其中 $x_1^{(n)} \in L_1, x_2^{(n)} \in L_2, U$ 完备, 由直交分解定理

$$x = x_1 + x_2$$

其中 $x_1 \in L_1, x_2 \in L_1^\perp$ 。因为

$$\|x_i^{(n)} - x_i\| \leq \|x^{(n)} - x\| \quad (i = 1, 2)$$

所以 $x_1^{(n)} \longrightarrow x_1 \in L_1, x_2^{(n)} \longrightarrow x_2 \in L_2$

故 $x \in L_1 \oplus L_2$, 即 L 是闭子空间。

6. 令 S_1 表如下的函数 $x(t)$ 的全体:

$$x(t) \in L[0, 2\pi]$$

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2) < +\infty$, 令

$$\|x\|_{S_1} = \pi^{\frac{1}{2}} \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

求证 S_1 是 Hilbert 空间且

$$T: x \longrightarrow \overline{x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

是由 S_1 到 $L^2[0, 2\pi]$ 中的等距算子。(此处 $S_1, L[0, 2\pi], L^2[0, 2\pi]$ 均为实空间。)

证 首先易知 T 是 $S_1 \longrightarrow L^2[0, 2\pi]$ 中的线性算子, 因为

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

是 $L^2[0, 2\pi]$ 中的一个完备标准直交系, 则由 Parseval 等式得

$$\|\overline{x}\|_2 = \pi^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n^2 + b_n^2) \right\}^{\frac{1}{2}} = \|x\|_{S_1}$$

故 T 是 S_1 到 $L^2[0, 2\pi]$ 中的等距算子。

另一方面, 任取 $\overline{x}(t) \in L^2[0, 2\pi]$, 则

$$\overline{x}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

右边级数在 $L^2[0, 2\pi]$ 中收敛, 令

$$a'_n = \frac{a_n}{\sqrt{n}}, \quad b'_n = \frac{b_n}{\sqrt{n}} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

则

$$\overline{x}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}} (a'_n \cos nt + b'_n \sin nt)$$

显然 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n'^2 + b_n'^2) < +\infty$, 故存在 $x(t) \in L^2[0, 2\pi] \subset$

$L[0, 2\pi]$, 使

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos nt + b'_n \sin nt)$$

右边级数在 $L^2[0, 2\pi]$ 中收敛, 容易证明

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos nt + b'_n \sin nt)$$

以及 $x(t) \in S_1$, 据算子 T 的定义, 有 $Tx = \overline{x}$, 故 T 是 S_1 到 $L^2[0, 2\pi]$ 上的等距算子。因为 $L^2[0, 2\pi]$ 是Hilbert空间, S_1 显然可用范数 $\|\cdot\|_{S_1}$ 定义内积成为一个内积空间, 故 S_1 是Hilbert空间。

7. 设 f 是完备内积空间 U 的子空间 G 上的有界线性泛函, 则 f 在 U 上存在唯一的延拓 F , 适合 $\|F\| = \|f\|_G$.

证 因为 f 为 G 上的有界线性泛函, 我们可不妨设 G 为闭子空间, 则 G 本身可看作一个完备内积空间。 $f \in G^*$, 必存在 $y \in G$, 使

$$f(x) = (x, y) \quad (\forall x \in G)$$

且 $\|f\|_G = \|y\|$, 现在令

$$F(x) = (x, y) \quad (\forall x \in U)$$

则 F 是 f 的一个延拓, 且 $\|F\| = \|y\| = \|f\|_G$. 下面证明延拓的唯一性。若另有 $\overline{F}(x) = (x, y')$ ($\forall x \in U$), 满足

$$\overline{F}(x) = f(x) = F(x) \quad (\forall x \in G)$$

$$\|\overline{F}\| = \|f\|_G \quad \text{即} \quad \|y'\| = \|y\|$$

则 $x \in G$ 时

$$(x, y' - y) = \overline{F}(x) - F(x) = 0, \quad y' - y \in G^\perp$$

显然

$$y' = y + (y' - y)$$

$$\|y'\|^2 = \|y\|^2 + \|y' - y\|^2$$

故 $\|y' - y\| = 0$, $y = y'$, 唯一性得证。

8. 证明Hilbert空间(可分完备内积空间)中的标准直交系最多是可列的。

证 设 $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为 H 中的标准直交系, 则

$$(e_\alpha, e_\beta) = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \beta \\ 1 & \alpha = \beta \end{cases}$$

且 $\alpha \neq \beta$ 时, $\|e_\alpha - e_\beta\| = \sqrt{2}$. 因为 H 可分, 设 $\{x_n\}$ 为 H 的可数稠子集, 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} S(x_n, \frac{1}{2}) \supset H$$

其中 $S(x_n, \frac{1}{2}) = \{x: \|x - x_n\| < \frac{1}{2}\}$, 若 $\{e_\alpha\}$ 不可数, 则至少有两个不同的元素 e_α, e_β 同属于某一个开球 $S(x_n, \frac{1}{2})$, 于是

$$\sqrt{2} = \|e_\alpha - e_\beta\| \leq \|e_\alpha - x_n\| + \|x_n - e_\beta\| < 1$$

矛盾, 故 $\{e_\alpha\}$ 至多可数。

9. 证明Hilbert空间的完备标准直交系必定是可列的,

证 设 $f = \{e_\alpha\}$ 是 H 的一个完备标准直交系, 首先由上题知 f 至多可列, 现若 f 为有限集 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 令

$$E = \left\{ x = \sum_{i=1}^n c_i e_i, c_i \text{ 为任意实数} \right\}$$

由于 f 是 H 的完备直交系, 则 $E = \overline{E} = H$, 这与 H 为无穷维空间矛盾, 故 f 必定是可列集。

10. 举例说明内积空间中的完全标准直交系不一定是完备的。

解 在 l^2 中, 记 $f = \{e_2, e_3, \dots, e_n, \dots\}$

其中 $e_n = \{0, 0, \dots, 0, \overbrace{1}^{n\text{位}}, 0, \dots\}$, 令 $f_1 = e_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} e_k$, 由

Riesz - Fischer 定理(参考文献[2] p172)知, $f_1 \in l^2$, 再令 U 是由 $f \cup \{f_1\}$ 所张成的线性子空间, 即

$$U = \left\{ \alpha_1 f_1 + \sum_{k=2}^n \alpha_k e_k : n \text{ 为任一自然数, } \right. \\ \left. \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ 为任意实数} \right\}$$

按照 l^2 的线性运算及内积, U 为内积空间, f 显然是 U 中的标准直交系, 且可以证明 f 在 U 中是完全的。事实上, 如果 $x \in U$, $x \perp f$, 则据 U 的定义, 存在 $\alpha_k (k=1, 2, \dots, n)$ 使得

$$x = \alpha_1 f_1 + \sum_{k=2}^n \alpha_k e_k$$

取 $m > n$, 得到 $0 = (x, e_m) = \frac{\alpha_1}{m}$, 因此

$$x = \sum_{k=2}^n \alpha_k e_k$$

同样, 对于 $m \leq n$, 有 $0 = (x, e_m) = \alpha_m$, 故 $x = 0$, 即 f 在 U 中完全, 但是

$$\|f_1\|^2 = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ \sum_{k=2}^{\infty} |(f_1, e_k)|^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

则

$$\|f_1\|^2 \neq \sum_{k=2}^{\infty} |(f_1, e_k)|^2$$

即 Parseval 公式不成立，故 f 在 U 中不是完备的。

11. 设 $\{e_k\}, \{e'_k\} (k=1, 2, 3, \dots)$ 是 Hilbert 空间 H 中的两个标准直交系，适合 $\sum_{k=1}^{\infty} \|e_k - e'_k\|^2 < 1$ ，则当 $\{e_k\}$ ，

$\{e'_k\}$ 中之一完备时，另一个也是完备的。

证 设 $\{e_k\}$ 完备，我们要证明 $\{e'_k\}$ 也完备，记 $M =$

$\bigvee_{k=1}^{\infty} \{e'_k\}$ —— 表示由 $\{e'_k\} (k=1, 2, 3, \dots)$ 张成的闭子

空间，只要证明 $x \perp M$ 时，必有 $x = 0$ 。设不然， $x \neq 0$ ，则

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k - e'_k)|^2$$

$$\leq \|x\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \|e_k - e'_k\|^2 < \|x\|^2$$

矛盾，故 $\{e'_k\}$ 完备。

[注] 本题条件 $\sum_{k=1}^{\infty} \|e_k - e'_k\|^2 < 1$ 可改弱为 $\sum_{k=1}^{\infty} \|e_k -$

$e'_k\|^2 < +\infty$ 。

事实上，若 $\sum_{k=1}^{\infty} \|e_k - e'_k\|^2 < +\infty$ ，则存在 n_0 ，使

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|e_k - e'_k\|^2 < 1$$

我们令

$$M = \bigvee_{k=n_0+1}^{\infty} \{e_k'\}, \quad N = \bigvee_{k=n_0+1}^{\infty} \{e_k\}$$

则

$$H = M \oplus M^\perp = N \oplus N^\perp$$

显然 M^\perp 的维数 $\geq n_0$, 因此, 若能证明 $\dim M^\perp = n_0$, 则

$$M^\perp = \bigvee_{k=1}^{n_0} \{e_k'\}, \quad H = \bigvee_{k=1}^{\infty} \{e_k'\},$$

从而 $\{e_k'\}$ 完备。现任取 $f \neq 0, f \in M^\perp$, 则

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |(f, e_k)|^2 = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |(f, e_k - e_k')|^2 < \|f\|^2$$

由此可知 $f \in N$, 令 $f = g_1 + g_2$, 其中 $g_1 \in N^\perp, g_2 \in N$, 则 $g_1 \neq 0$, 记 $Pf = g_1$, 则 P 是 $M^\perp \rightarrow N^\perp$ 的一对一线性算子, 故 M^\perp 与 N^\perp 的一个子集同构, 但 $\dim N^\perp = n_0$, 故 $\dim M^\perp \leq n_0$, 从而 $\dim M^\perp = n_0, \{e_k'\}$ 完备得证。

12. 设 U 为Hilbert空间, 求证:

$$(i) \min_{\substack{C_k \in K \\ 1 \leq k \leq n}} \left\| x - \sum_{k=1}^n C_k y_k \right\|^2 = \frac{G(x, y_1, y_2, \dots, y_n)}{G(y_1, y_2, \dots, y_n)}$$

这里 K 为复数域, x, y_1, y_2, \dots, y_n 为 U 中的元素, y_1, y_2, \dots, y_n 线性无关, 而

$$G(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_2, y_1) & \dots & (y_n, y_1) \\ (y_1, y_2) & (y_2, y_2) & \dots & (y_n, y_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (y_1, y_n) & (y_2, y_n) & \dots & (y_n, y_n) \end{vmatrix}, \text{ 令}$$

(ii) 对任意的 $m < n$,

$$\frac{G(y_k, y_{k+1}, \dots, y_n)}{G(y_{k+1}, \dots, y_n)} \leq \frac{G(y_k, y_{k+1}, \dots, y_m)}{G(y_{k+1}, \dots, y_m)}$$

$$(0 \leq k \leq m-1)$$

$$\frac{G(y_m, y_{m+1}, \dots, y_n)}{G(y_{m+1}, \dots, y_n)} \leq G(y_m)$$

$$G(y_1, y_2, \dots, y_n) \leq G(y_1, \dots, y_m) G(y_{m+1}, \dots, y_n)$$

$$G(y_1, y_2, \dots, y_n) \leq G(y_1) G(y_2) \dots G(y_n)$$

证 (i) 令 $M = \left\{ y = \sum_{k=1}^n c_k y_k, c_k \in K, k=1, 2, \dots, n \right\}$

——有穷维空间, 则 M 是 U 的一个闭子空间, $U = M \oplus M^\perp$, 当 $x \in M$ 时, (i) 显然成立。下面设 $x \in U - M$, 首先容易证明对于 $x \in U - M$, 欲使 $y \in M$ 与 x 有最短距离的充要条件是 $x - y \perp M$ 。现设 $x \in U - M$, 由直交分解定理, $x = y + z$, 其中 $y \in M, z = x - y \perp M$,

$$\|x - y\| = \min_{y \in M} \left\| x - \sum_{k=1}^n c_k y_k \right\|$$

$y \in M$, 则

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

由条件 $x - y \perp M$ 可得

$$\begin{cases} c_1(y_1, y_1) + c_2(y_2, y_1) + \dots + c_n(y_n, y_1) = (x, y_1) \\ c_1(y_1, y_2) + c_2(y_2, y_2) + \dots + c_n(y_n, y_2) = (x, y_2) \\ \dots\dots\dots \\ c_1(y_1, y_n) + c_2(y_2, y_n) + \dots + c_n(y_n, y_n) = (x, y_n) \end{cases}$$

$$\delta^2 = \|x - y\|^2, \text{ 则} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\delta^2 &= (x-y, x-y) = (x, x) - (y, x) - (x, y) + (y, y) \\ &= (x, x) - (y, x)\end{aligned}$$

即

$$c_1(y_1, x) + c_2(y_2, x) + \cdots + c_n(y_n, x) = (x, x) - \delta^2 \quad (2)$$

将(1)和(2)联立, 看作 $(n+1)$ 个未知数的齐次方程, 有非零解 $c_1, c_2, \cdots, c_n, 1$, 则必有

$$\left| \begin{array}{cccc} (y_1, y_1) & (y_2, y_1) & \cdots & (y_n, y_1) - (x, y_1) \\ (y_1, y_2) & (y_2, y_2) & \cdots & (y_n, y_2) - (x, y_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (y_1, y_n) & (y_2, y_n) & \cdots & (y_n, y_n) - (x, y_n) \\ (y_1, x) & (y_2, x) & \cdots & (y_n, x) - \delta^2 - (x, x) \end{array} \right| = 0$$

即

$$\begin{aligned}\delta^2 G(y_1, y_2, \cdots, y_n) &= G(y_1, y_2, \cdots, y_n, x) \\ &= G(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)\end{aligned}$$

故(i)成立。

(ii) 设 $m < n$, $\{y_{k+1}, y_{k+2}, \cdots, y_n\}$ 及 $\{y_{k+1}, y_{k+2}, \cdots, y_m\}$ 分别张成闭子空间 M_1 和 M_2 , 显然 $M_2 \subset M_1$, 令

$$\delta_1^2 = \inf_{y \in M_1} \|y_k - y\|^2, \quad \delta_2^2 = \inf_{y \in M_2} \|y_k - y\|^2$$

则

$$\delta_1^2 \leq \delta_2^2$$

故

$$\frac{G(y_k, y_{k+1}, \cdots, y_n)}{G(y_{k+1}, \cdots, y_n)} \leq \frac{G(y_k, y_{k+1}, \cdots, y_m)}{G(y_{k+1}, \cdots, y_m)} \quad (3)$$

再令

$$M = \left\{ x = \sum_{k=m+1}^n c_k y_k, c_k \in K \right\}$$

则显然有

$$\inf_{y \in M} \|y_m - y\|^2 \leq \|y_m\|^2$$

所以

$$\frac{G(y_m, y_{m+1}, \dots, y_n)}{G(y_{m+1}, \dots, y_n)} \leq G(y_m) \quad (4)$$

由(3)、(4)可得

$$\begin{aligned} \frac{G(y_1, y_2, \dots, y_n)}{G(y_1, y_2, \dots, y_m)} &\leq \frac{G(y_2, y_3, \dots, y_n)}{G(y_2, y_3, \dots, y_m)} \leq \dots \\ &\leq \frac{G(y_m, y_{m+1}, \dots, y_n)}{G(y_m)} \leq G(y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} G(y_1, y_2, \dots, y_n) &\leq G(y_1, y_2, \dots, y_m) \\ &\quad \cdot G(y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n) \end{aligned}$$

从而成立

$$G(y_1, y_2, \dots, y_n) \leq G(y_1) G(y_2) \dots G(y_n)$$

13. 设 U 为Hilbert空间, $\{y_k\} \subset U (k=1, 2, 3, \dots)$, 其中任意有限个元是线性无关的, 则将 $\{y_k\}$ 标准直交化所得的元素列可以表成

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{G_k G_{k-1}}} \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & \dots & (y_k, y_1) \\ (y_1, y_2) & \dots & (y_k, y_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ (y_1, y_{k-1}) & \dots & (y_k, y_{k-1}) \\ y_1 & \dots & y_k \end{vmatrix}$$

其中 $G_0 = 1$, $G_k = G(y_1, y_2, \dots, y_k)$.

证 首先用归纳法证明 $\{e_k\}$ 为标准直交系。

$$e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{G_2 G_1}} \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_2, y_1) \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$e_2 \perp e_1 \Leftrightarrow e_2 \perp y_1$$

显然有 $(e_2, y_1) = 0$, 故 $e_2 \perp e_1$. 一般地, 设 e_1, e_2, \dots, e_{k-1} 相互直交, 要证明 e_k 与 e_1, e_2, \dots, e_{k-1} 直交等价于证明 e_k 与 y_1, y_2, \dots, y_{k-1} 直交, 其中

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{G_k G_{k-1}}} \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & \dots & (y_k, y_1) \\ (y_1, y_2) & \dots & (y_k, y_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ (y_1, y_{k-1}) & \dots & (y_k, y_{k-1}) \\ y_1 & \dots & y_k \end{vmatrix}$$

由于

$$(e_k, y_i) = \frac{1}{\sqrt{G_k G_{k-1}}} \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & \dots & (y_k, y_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ (y_1, y_{k-1}) & \dots & (y_k, y_{k-1}) \\ (y_1, y_i) & \dots & (y_k, y_i) \end{vmatrix} = 0$$

($i = 1, 2, \dots, k-1$), 故 e_k 与 e_1, e_2, \dots, e_{k-1} 直交。

下面再证明 $\|e_k\| = 1$ ($k = 1, 2, 3, \dots$)。令

$$u_k = \sqrt{G_k G_{k-1}} e_k$$

则

$$\|e_k\| = 1 \Leftrightarrow \|u_k\| = \sqrt{G_k G_{k-1}}$$

记

$$u_k = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_k y_k$$

$$\|u_k\| = \sqrt{(u_k, a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_k y_k)}$$

因为 $u_k \perp y_i (i=1, 2, \dots, k-1)$ ，所以

$$\|u_k\| = \sqrt{a_1 a_k (y_1, y_k) + \dots + a_k^2 (y_k, y_k)}$$

据 G_k 的定义，我们有

$$a_k = G_{k-1}, \quad G_k = a_1 (y_1, y_k) + \dots + a_k (y_k, y_k)$$

所以

$$\begin{aligned} \sqrt{G_k G_{k-1}} &= \sqrt{a_1 a_k (y_1, y_k) + \dots + a_k^2 (y_k, y_k)} \\ &= \|u_k\| \end{aligned}$$

故 $\|e_k\| = 1 (k=1, 2, 3, \dots)$ 。

最后证明 $\{e_k\}$ 就是由 $\{y_k\}$ 按参考文献 [2] p176 定理 1.8 得到的标准直交系。为此，设 $\{e'_k\}$ 是由 $\{y_k\}$ 按定理 1.8 作出的标准直交系，易知 e'_k 与 y_1, y_2, \dots, y_{k-1} 直交， $e_1 = e'_1$ ，记

$$\begin{aligned} e'_k &= \alpha'_k y_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha'_j y_j \\ e_k &= \alpha_k y_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j y_j \end{aligned}$$

其中 α_k, α'_k 均为正数 ($k=2, 3, 4, \dots$)，则

$$e_k - \frac{\alpha_k}{\alpha'_k} e'_k = \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j y_j$$

从而

$$\left(e_k - \frac{\alpha_k}{\alpha'_k} e'_k, e_k - \frac{\alpha_k}{\alpha'_k} e'_k \right) = 0$$

即 $e_k = \frac{\alpha_k}{\alpha'_k} e'_k$. 由于 $\|e_k\| = \|e'_k\| = 1$, $\frac{\alpha_k}{\alpha'_k} > 0$, 故

$$e_k = e'_k \quad (k=1,2,3,\dots)$$

14. 称 $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}$ 为艾尔米特多项式,

令

$$e_n(t) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t) \quad (n=1,2,3,\dots)$$

证明 $\{e_n\}$ 组成 $L^2(-\infty, +\infty)$ 中的一个完备的标准直交系。

证 首先证明 $\{e_n(t)\}$ 彼此直交。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e_n(t) e_m(t) dt &= (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} (2^m m! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_n(t) H_m(t) dt \end{aligned}$$

用数学归纳法可证明

$$\begin{aligned} H_n(t) &= n! \sum_{j=0}^N (-1)^j \frac{2^{n-2j}}{j!(n-2j)!} t^{n-2j} \\ &= \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j}{j!} n(n-1)\cdots(n-2j+1) (2t)^{n-2j} \end{aligned}$$

其中

$$N = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{当 } n \text{ 为偶数时} \\ \frac{n-1}{2} & \text{当 } n \text{ 为奇数时} \end{cases}$$

所以

$$H'_n(t) = 2n \sum_{j=0}^M \frac{(-1)^j}{j!} (n-1)(n-2)\cdots$$

$$\times (n-2j)(2t)^{n-1-2j} = 2nH_{n-1}(t)$$

其中

$$M = \begin{cases} \frac{n-2}{2} & \text{当 } n \text{ 为偶数时} \\ \frac{n-1}{2} & \text{当 } n \text{ 为奇数时} \end{cases}$$

令 $v(t) = e^{-t^2}$, 则

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e_m(t) e_n(t) dt &= \left\{ (2^n n! \sqrt{\pi}) (2^m m! \sqrt{\pi}) \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(t) v^{(n)}(t) dt \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H_m(t) v^{(n)}(t) dt &= H_m v^{(n-1)}(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} 2m H_{m-1}(t) v^{(n-1)}(t) dt \\ &= -2m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(t) v^{(n-1)}(t) dt = \dots\dots \\ &= (-1)^m 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} H_0(t) v^{(n-m)}(t) dt \\ &= (-1)^m 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} v^{(n-m)}(t) dt \end{aligned}$$

故当 $n = m$ 时

$$\int_{-\infty}^{\infty} e_m(t) e_n(t) dt = 1$$

$n \neq m$ 时, 不妨设 $m < n$, 由于

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H_m(t) v^{(n)}(t) dt &= (-1)^m 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} v^{(n-m)}(t) dt \\ &= (-1)^m 2^m m! v^{(n-m-1)}(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \end{aligned}$$

故

$$\int_{-\infty}^{\infty} e_n(t)e_m(t)dt = 0 \quad (n \neq m)$$

这就证明了 $\{e_n(t)\}$ 是 $L^2(-\infty, +\infty)$ 中的标准直交系。我们还可以证明 $\left\{t^k e^{-t^2/2}\right\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $L^2(-\infty, +\infty)$ 的一个完全系(可参阅参考文献[6]p121—122), 由此可知: $\{P(t)e^{-t^2/2}; P(t)$ 为任一多项式 $\}$ 在 $L^2(-\infty, +\infty)$ 中稠密, 故 $\{e_n(t)\}$ 是 $L^2(-\infty, +\infty)$ 的完备标准直交系。

15. 设 P 是完备内积空间 U 的闭子空间 L 上的投影算子, 则 $Px = x$ 的充分必要条件是 $x \in L$; $Px = 0$ 的充分必要条件是 $x \perp L$.

证 任取 $x \in U$, 据直交分解定理, 可唯一地表成

$$x = x_1 + x_2$$

其中 $x_1 \in L, x_2 \perp L, Px = x$, 故

$$Px = x \Leftrightarrow x \in L, Px = 0 \Leftrightarrow x \perp L$$

16. 设 $\{e_k\} (k=1, 2, 3, \dots)$ 是完备内积空间 U 中的标准直交系, L 是 $\{e_k\}$ 张成的线性子空间, 证明 \overline{L} 上的投影算子 P 可表成

$$Px = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k \quad (x \in U)$$

证 $x \in U, Px \in \overline{L}$, 由于 \overline{L} 本身可视为完备内积空间, 则据参考文献[2]p173定理1.6立即知 $\{e_k\}$ 是 \overline{L} 中的完备标准直交系, 故

$$Px = \sum_{k=1}^{\infty} (Px, e_k) e_k = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k \quad (\forall x \in U)$$

17. 设 P_1, P_2 为可换的投影算子, 则 $P = P_1 + P_2 -$

P_1P_2 也是投影算子, 且 $P \geq P_1$, $P \geq P_2$. 当任一投影算子 Q 满足 $Q \geq P_1$, $Q \geq P_2$ 时, 则必满足 $Q \geq P$.

证 $P = P^*$, $P = P^2$ 以及 $PP_2 = P_2$, $PP_1 = P_1$ 均可直接验证, 由参考文献[2]定理2.7及定理2.10立即可知 P 是一投影算子, 且 $P \geq P_1$, $P \geq P_2$.

由

$$Q \geq P_1 \Leftrightarrow QP_1 = P_1; \quad Q \geq P_2 \Leftrightarrow QP_2 = P_2$$

立即得 $QP = P$, 故 $Q \geq P$.

18. 设 T 为完备内积空间 U 中的有界线性算子, 且 $\|T\| \leq 1$, 证明

$$\{x: Tx = x\} = \{x: T^*x = x\}$$

证 记 $M = \{x: Tx = x\}$, $N = \{x: T^*x = x\}$, 任取 $x \in M$, 则

$$\begin{aligned} 0 &\leq (T^*x - x, T^*x - x) = \|T^*x\|^2 - \|x\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 - \|x\|^2 = 0 \end{aligned}$$

故 $T^*x = x$, $M \subset N$. 同理可证 $N \subset M$, 因此 $M = N$.

19. 设 A 是复内积空间 U 上的有界线性算子, 如果对每个 $x \in U$, $(Ax, x) = 0$, 则 $A = 0$. 对于实空间, 此结果成立否? 如果 A 是自伴的, 则不论 U 是实是复, 只要 $(Ax, x) = 0$ ($\forall x \in U$), 就有 $A = 0$.

证 对于复空间, 由条件 $(Ax, x) = 0$ ($\forall x \in U$), 并利用等式

$$\begin{aligned} (Ax, y) &= \frac{1}{4}[(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) \\ &\quad + i(A(x+iy), x+iy) - i(A(x-iy), x-iy)] \end{aligned}$$

我们取 $y = Ax$, 就得 $Ax = 0$ ($\forall x \in U$), 故 $A = 0$.

对于实空间不一定成立, 例如, 在二维平面上的旋转变

换 $A: (x, y) \longrightarrow (x', y')$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

记 $u = (x, y)$, $Au = (x', y')$, 则

$$(Au, u) = x'x + y'y = yx - xy = 0 \quad (\forall u \in R^2)$$

但显然 $A \neq 0$.

当 A 为自伴算子时, 对实空间 U , 我们利用等式

$$(Ax, y) = \frac{1}{4}[(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)]$$

即得

$$(Ax, y) = 0 \quad (\forall x, y \in U)$$

故不论 U 是实的还是复的, 均有 $A = 0$.

20. 设 A, B 是完备内积空间 U 上的线性算子, 适合

$$(Ax, y) = (x, By)$$

其中 $x, y \in U$, 则 A 是有界的。

证 为了证明 A 有界, 我们只要证明 A 是闭算子, 设

$$x_n \longrightarrow x, \quad Ax_n \longrightarrow z \quad (n \longrightarrow \infty)$$

则对一切 $y \in U$,

$$\begin{aligned} (z, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (Ax_n, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, By) \\ &= (x, By) = (Ax, y) \end{aligned}$$

所以 $Ax = z$, A 是闭线性算子。

21. 设 T 为定义在完备内积空间 U 上的有界线性算子, 令 N 为 T 的零空间, M 为 T^* 的值域, 证明 $N = M^\perp$.

证 $N = \{x \in U; Tx = 0\}$, $M = \{T^*x; x \in U\}$, 任取 $y \in N$, 对每个 $z = T^*x \in M$,

$$(y, z) = (y, T^*x) = (Ty, x) = 0$$

故 $N \subset M^\perp$. 反之, 任取 $y \in M^\perp$, 则

$$(y, T^*x) = (Ty, x) = 0 \quad (\forall x \in U)$$

故 $Ty = 0$, 即

$$y \in N, \quad M^\perp \subset N$$

因此 $N = M^\perp$.

22. 设 U 为完备内积空间, T 为 U 上的有界线性算子, 若对一切 $x \in U$, $\operatorname{Re}(Tx, x) = 0$, 则 $T = -T^*$.

证 令 $B = T + T^*$, 则 $B^* = B$, B 为自伴算子, 任取 $x \in U$,

$$(Bx, x) = (Tx, x) + (T^*x, x) = 2\operatorname{Re}(Tx, x)$$

由题给条件得 $(Bx, x) = 0 \quad (\forall x \in U)$, 再据本章第 19 题知 $B = 0$, 故 $T = -T^*$.

23. 设 T 为 l^2 上的有界线性算子, 对 $x = \{\xi_k\}$, $Tx = y = \{\eta_k\}$, 其中

$$\eta_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \xi_j \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

再设 $T^*x = y^* = \{y_k^*\}$, 而

$$y_k^* = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^* \xi_j$$

证明 $a_{kj}^* = \overline{a_{jk}}$.

证 令 $e_n = (\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n \text{ 位}}, 1, 0, \dots) \in l^2, (n = 1, 2, 3, \dots)$, 则 $a_{kj} = (Te_j, e_k)$, $a_{kj}^* = (T^*e_j, e_k) = (e_j, Te_k) = \overline{(Te_k, e_j)} = \overline{a_{jk}}$.

24. 设 $\{e_n\}$ 是完备内积空间 U 中的标准直交系, $\{\lambda_n\}$

$\longrightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 且每个 λ_n 是实数, 令

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n$$

则 T 是全连续自伴算子。

证 令 $T_n x = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x, e_k) e_k$, 容易证明 T_n 是定义在 U

上的有界对称算子, $\|T_n\| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|$, 而且 T_n 是有穷秩

算子。因为

$$\begin{aligned} \|(T_n - T)x\|^2 &= \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k) e_k, \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k) e_k \right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^2 |(x, e_k)|^2 \leq \max_{n+1 \leq k < \infty} \lambda_k^2 \|x\|^2 \end{aligned}$$

所以

$$\|T_n - T\| \leq \sqrt{\max_{n+1 \leq k < \infty} \lambda_k^2}$$

由条件 $\lambda_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), 立即得

$$\|T_n - T\| \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

故 T 是全连续算子。 T 的对称性由下式可知:

$$\begin{aligned} (Tx, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (T_n x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x, T_n y) \\ &= (x, Ty) \end{aligned}$$

($\forall x, y \in U$), 故 T 为全连续自伴算子。

25. 设 T 为 $L^2[a, b]$ 上的全连续自伴算子, 而且有

$L^2[a, b]$ 中的完备标准直交系 $\{e_n\}$, 使

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < +\infty$$

证明: 必存在 $a \leq t \leq b$, $a \leq s \leq b$ 上可测的平方可积函数 $K(t, s)$ 适合:

$$\overline{K(s, t)} = K(t, s)$$

且对一切 $x(t) \in L^2[a, b]$,

$$Tx(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

证 由于 T 是 $L^2[a, b]$ 上的全连续自伴算子, 则必存在完备标准直交系 $\{\varphi_n\}$, 使 $T\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$, 其中 $\lambda_n (n=1, 2, 3, \dots)$ 为 T 的特征值, λ_n 均为实数, 则

$$e_k = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(k)} \varphi_n \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

其中 $C_n^{(k)} = (e_k, \varphi_n) \quad (k, n=1, 2, 3, \dots)$, 于是

$$\|Te_k\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |C_n^{(k)}|^2 \cdot |\lambda_n|^2$$

由于 $\varphi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{C_n^{(k)}} e_k$, $\{e_k\}$ 完备, 则

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_n^{(k)}|^2 = \|\varphi_n\|^2 = 1$$

故

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |C_n^{(k)}|^2 \cdot |\lambda_n|^2 \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |C_n^{(k)}|^2 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < +\infty$$

令

$$K(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(t) \varphi_n(s)$$

则

$$\int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2 dt ds = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < +\infty$$

且

$$\overline{K(s, t)} = K(t, s)$$

$$T\varphi_n(t) = \lambda_n \varphi_n(t) = \int_a^b K(t, s) \varphi_n(s) ds$$

由于 $\{\varphi_n\}$ 是 $L^2[a, b]$ 中的完备标准直交系, 故对一切 $x(t) \in L^2[a, b]$ 有

$$Tx(t) = \int_a^b K(t, s) x(s) ds$$

26. 设 T 为 Hilbert 空间 U 上的有界线性算子, $\{e_n\}$ 为 U 中完备的标准直交系, 若对任何 m, n , 有 $(Te_n, e_m) = \overline{(Te_m, e_n)}$, 则 T 自伴。

证 任取 $x, y \in U$, 由于 $\{e_n\}$ 是 U 中的完备标准直交系, 所以

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k, \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} (y, e_k) e_k$$

$$\text{令 } x_n = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k, \quad y_n = \sum_{k=1}^n (y, e_k) e_k, \text{ 据条件}$$

$$(Te_n, e_m) = \overline{(Te_m, e_n)} = (e_n, Te_m)$$

可得

$$(Tx_n, y_n) = (x_n, Ty_n)$$

故 $(Tx, y) = (x, Ty) \quad (\forall x, y \in U)$, T 是自伴算子。

27. 有界线性算子 T 称为正规的, 是指 $T^*T = TT^*$. 证明当 T 为正规算子时, $\|T^*T\| = \|T^2\|$.

证 因为

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 &= (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) \\ &= (TT^*x, x) = \|T^*x\|^2\end{aligned}$$

故

$$\|Tx\| = \|T^*x\| \quad (\forall x \in U)$$

从而

$$\|T^*Tx\| = \|T^2x\| \quad (\forall x \in U)$$

于是

$$\|T^*T\| = \|T^2\|$$

实际上我们还可以证明 $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

28. T 为正规算子的充分必要条件是 T 可表为 $T = T_1 + iT_2$, 其中 T_1, T_2 为可换自伴算子。

证 充分性显然, 现证必要性。设 T 正规, 我们令

$$T_1 = \frac{T + T^*}{2} \quad T_2 = \frac{T - T^*}{2i}$$

则易证 $T = T_1 + iT_2$, 且 T_1, T_2 为可换的自伴算子, 这种表示还是唯一的。

29. 设 T 为定义在复完备内积空间 U 上的有界线性算子, 如果存在 $\alpha_0 > 0$, 使 $(Tx, x) \geq \alpha_0(x, x)$, 则称 T 为正定的。证明凡正定算子必有有界逆算子 T^{-1} , 且 $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha_0}$.

证 设 $Tx = 0$, 由于 $0 = (Tx, x) \geq \alpha_0(x, x)$, 则 $x = 0$, 故

T^{-1} 存在。又从 $\alpha_0\|x\|^2 \leq \|Tx\| \cdot \|x\|$ 可得

$$\|Tx\| \geq \alpha_0\|x\| \quad (\forall x \in U)$$

故 T^{-1} 有界, 且 $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha_0}$.

最后证明 $T^{-1} \in \mathcal{B}(U)$. 即证明 $R(T) = U$. 利用 T 正定必自伴, 得 $N(T) = R(T)^\perp$, 因此 $\overline{R(T)} = U$. 又因为 T^{-1} 有界, T 为闭算子, 则必有

$$R(T) = \overline{R(T)} = U$$

故 $T^{-1} \in \mathcal{B}(U)$.

30. 设 U 为Hilbert空间, T 是 U 上的自伴算子, 又设有 $x_0 \in U$ 使 $\{x_0, Tx_0, T^2x_0, \dots, T^n x_0, \dots\}$ 张成的子空间在 U 中稠密。设 $\{E_\lambda\}$ 是 T 的谱族, 令 $\sigma(\lambda) = (E_\lambda x_0, x_0)$, 证明必存在 $L^2(\sigma)$ 到 U 上的等距同构映射 A , 使得当 $f \in L^2(\sigma)$ 时,

$$(A^{-1}TA)f(t) = t f(t)$$

证 因为 $\sigma(\lambda) = (E_\lambda x_0, x_0)$ 是单调上升右连续函数, 由它可定义一个全有限的LS测度 σ , 令 \mathcal{P} 为多项式全体, 则 $\mathcal{P} \subset L^2(\sigma)$. 作 \mathcal{P} 到 U 中的等距算子 A 如下:

$$Ap(t) = P(T)x_0 \quad (1)$$

此处 $p(t)$ 是任一多项式, 由于

$$\begin{aligned} (Ap(t), Ap(t)) &= (P(T)x_0, P(T)x_0) \\ &= \int_{m=0}^M |p(t)|^2 d(E_\lambda x_0, x_0) \\ &= \int_{m=0}^M |p(t)|^2 d\sigma \end{aligned}$$

其中 m, M 为自伴算子 T 的下界和上界, 故 A 是等距算子。

由于 \mathscr{D} 在 $L^2(\sigma)$ 中稠密, 故 A 可唯一地延拓成 $L^2(\sigma)$ 到 U 中的等距算子。又因为 U 完备, 易知 $AL^2(\sigma)$ 是 U 中的闭子空间, 但 $AL^2(\sigma)$ 至少包含了

$$\{x_0, Tx_0, T^2x_0, \dots, T^n x_0, \dots\}$$

据题设, $AL^2(\sigma) = U$, 即 A 是 $L^2(\sigma)$ 到 U 上的保范算子。

由(1)式得

$$p(t) = A^{-1}P(T)x_0 \quad (p(t) \in \mathscr{D})$$

所以

$$(A^{-1}TA)p(t) = A^{-1}TP(T)x_0 = tp(t) \quad (\forall p(t) \in \mathscr{D})$$

利用 \mathscr{D} 在 $L^2(\sigma)$ 中稠密, $A^{-1}TA$ 为有界线性算子, 不难证明对一切 $f \in L^2(\sigma)$ 有

$$(A^{-1}TA)f(t) = tf(t) \quad (2)$$

(2)式说明了自伴算子 T 酉等价于 $L^2(\sigma)$ 中的乘法算子。

31. 设 $T = \int_{m=0}^M \lambda dE_\lambda$, 对 $x \in U, \|x\| = 1$, 令 $\alpha_x = (Tx, x)$,

$\beta_x = \|Tx\|$, 则 $\beta_x^2 \geq \alpha_x^2$, 且对任意的 $\varepsilon > 0$, 必存在 $\lambda_0 \in \sigma(T)$, 使

$$\alpha_x - \sqrt{\beta_x^2 - \alpha_x^2} - \varepsilon \leq \lambda_0 \leq \alpha_x + \sqrt{\beta_x^2 - \alpha_x^2} + \varepsilon$$

证 本题我们利用 LS 积分证明更强的结论:

$$\alpha_x - \sqrt{\beta_x^2 - \alpha_x^2} \leq \lambda_0 \leq \alpha_x + \sqrt{\beta_x^2 - \alpha_x^2}$$

因为

$$\alpha_x = (Tx, x) = \int_{m=0}^M \lambda d(E_\lambda x, x)$$

$$\beta_{\bullet}^2 = \int_{m=0}^M \lambda^2 d(E_{\lambda}x, x)$$

所以

$$\begin{aligned} \|(T - \alpha_{\bullet}I)x\|^2 &= \int_{m=0}^M (\lambda^2 - \alpha_{\bullet})^2 d\|E_{\lambda}x\|^2 \\ &= \beta_{\bullet}^2 - \alpha_{\bullet}^2 \geq 0 \end{aligned}$$

利用LS积分性质

$$\int_{m=0}^M (\lambda - \alpha_{\bullet})^2 d\|E_{\lambda}x\|^2 = \int_{\sigma(T)} (\lambda - \alpha_{\bullet})^2 d\|E_{\lambda}x\|^2$$

则

$$\beta_{\bullet}^2 - \alpha_{\bullet}^2 = \int_{\sigma(T)} (\lambda - \alpha_{\bullet})^2 d\|E_{\lambda}x\|^2 \geq \inf_{\lambda \in \sigma(T)} (\lambda - \alpha_{\bullet})^2$$

由于 $\sigma(T)$ 是直线上的有界闭集, 故必存在 $\lambda_0 \in \sigma(T)$, 使

$$\beta_{\bullet}^2 - \alpha_{\bullet}^2 \geq (\lambda_0 - \alpha_{\bullet})^2$$

即存在 $\lambda_0 \in \sigma(T)$, 使

$$\alpha_{\bullet} - \sqrt{\beta_{\bullet}^2 - \alpha_{\bullet}^2} \leq \lambda_0 \leq \alpha_{\bullet} + \sqrt{\beta_{\bullet}^2 - \alpha_{\bullet}^2}$$

32. 设 T 是完备内积空间 U 上的自伴算子, $\{E_{\lambda}\}$ 为 T 的谱族, 证明 T 的值域闭包是 $[(I - E_0) + E_{-0}](U)$.

证 令 $N(T) = \{x \in U; Tx = 0\}$, 则据参考文献[2] p211定理2.16(i)的证明可知

$$N(T) = (E_0 - E_{-0})(U)$$

记 $R(T) = \{Tx; x \in U\}$, 由本章第21题可得

$$N(T) = R(T)^{\perp}$$

故

$$\begin{aligned}\overline{R(T)} &= N(T)^\perp = [I - (E_0 - E_{-0})](U) \\ &= [(I - E_0) + E_{-0}](U)\end{aligned}$$

33. 设 $\{\alpha_n\}$ 是实数列且 $\sup_n |\alpha_n| < +\infty$, 在 l^2 中令

$$Tx = y, \quad \eta_n = \alpha_n \xi_n$$

其中: $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}$, $y = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots\}$.
证明 $\sigma(T)$ 等于 $\{\alpha_n\}$ 的闭包, 每个 α_n 是 T 的特征值, T 的谱族 E_λ 满足下面的关系:

$$(E_\lambda x, y) = \sum_{\alpha_i \leq \lambda} \xi_i \overline{\eta_i}$$

证 每个 α_n 显然是自伴算子 T 的特征值, 且对应于 α_n 的特征向量是 e_n 张成的一维子空间 H_n , 显然 $n \neq m$ 时, $H_n \perp H_m$.

若 $\lambda \in \overline{\{\alpha_n\}}$, 则

$$\inf_n |\lambda - \alpha_n| = d > 0, \quad \|(\lambda - T)x\| \geq d \|x\|$$

且

$$R(T_\lambda) = l^2$$

故 $\lambda \in \rho(T)$, 从而 $\sigma(T) = \overline{\{\alpha_n\}}$. 我们令 P_n 为 H_n 上的投影算子, 则 P_n 彼此直交, 且

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i = I, \quad x = \{\xi_i\} \in l^2, \quad P_i x = \xi_i e_i$$

令 $E_\lambda = \sum_{\alpha_i \leq \lambda} P_i$, 容易验证 E_λ 满足谱族的三个条件以及

$$(Tx, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n \overline{\eta_n} = \int_{m-0}^M \lambda d(E_\lambda x, y)$$

其中 $m = \inf_n \alpha_n$, $M = \sup_n \alpha_n$. 故 $\{E_\lambda\}$ 是 T 的谱族, $\{E_\lambda\}$ 满足关系:

$$(E_\lambda x, y) = \sum_{\alpha_i \leq \lambda} \xi_i \overline{\eta_i}$$

34. 证明 Hilbert 空间 H 中的任何闭凸子集 A 含有最小范数的元素 (即存在 $x_0 \in A$, 使 $\|x_0\| = \inf_{x \in A} \|x\|$).

证 设 A 为 Hilbert 空间 H 中的闭凸子集, 我们令

$$\alpha = \inf_{x \in A} \|x\|$$

则存在点列 $\{x_n\} \subset A$, 使

$$\|x_n\| \longrightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

因为 $\frac{x_n + x_m}{2} \in A$, 所以

$$\left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\| \geq \alpha$$

按照中线公式可得

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\|^2 &= \|x_m + (-x_n)\|^2 \\ &= 2\|x_m\|^2 + 2\|x_n\|^2 - 4 \left\| \frac{x_m + x_n}{2} \right\|^2 \\ &\leq 2\|x_m\|^2 + 2\|x_n\|^2 - 4\alpha^2 \end{aligned}$$

因为当 $m, n \rightarrow \infty$ 时, $\|x_m\| \rightarrow \alpha$, $\|x_n\| \rightarrow \alpha$, 故

$$\|x_m - x_n\| \longrightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

即 $\{x_n\}$ 是 H 中的基本列. 于是 $x_n \rightarrow x_0 \in A$, $\|x_0\| = \inf_{x \in A} \|x\|$.

35. 证明内积空间是一致凸的。

证 任给 $\varepsilon > 0$, $\|x\| = \|y\| = 1$, 设 $\|x - y\| \geq \varepsilon$, 则

$$\|x - y\|^2 = 2 - (y, x) - (x, y) \geq \varepsilon^2$$

即

$$(y, x) + (x, y) \leq 2 - \varepsilon^2$$

从而

$$\|x + y\|^2 \leq 4 - \varepsilon^2$$

我们取 $0 < \delta < 2$, 使得

$$y^2 - 4\delta + \varepsilon^2 = 0$$

则得

$$\|x + y\|^2 \leq 4 - 4\delta + \delta^2 = (2 - \delta)^2$$

即

$$\|x + y\| \leq 2 - \delta$$

故内积空间是一致凸的。

36. 试求作用于复 l^2 空间的算子 T 的共轭算子, 其中 $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$, $(x_n) \in l^2$.

答 $T^*(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$

37. 试求作用于 $L^2(0, 1)$ 的算子的共轭算子。

(i) $Ax(t) = \int_0^1 x(s) ds$;

(ii) $Ax(t) = \alpha(t)x(t)$, 其中 $\alpha(t)$ 为给定的实有界可测函数。

答 (i) $A^*y(t) = \int_0^1 y(s) ds$;

(ii) $A^*y(t) = \alpha(t)y(t)$.

38. 设 H 为 Hilbert 空间, $T \in \mathcal{B}(H)$, 证明 $R(T) \subset N(T^*)^\perp$, 并举例说明严格包含关系能够成立。这里 $R(T)$, $N(T)$ 分别表示 T 的值域和零空间。

39. 设 H 为 Hilbert 空间, $T, S \in \mathcal{B}(H)$, 试证明

(i) 若 T 紧, 且 $S^*S \leq T^*T$, 则 S 是紧算子;

(ii) 若存在常数 $c > 0$, 使得对一切 $x \in H$, 有

$$\|Tx\| \geq c\|x\|$$

则 T 不是紧算子。

40. 设 H 为 Hilbert 空间, $T \in \mathcal{B}(H)$, T^* 为 T 的 Hilbert 共轭算子, 证明 T 为紧算子的充分必要条件是 T^*T 为紧算子。

41. 设算子 $T: \text{复 } l^2 \rightarrow l^2$, $x = \{\xi_k\} \in l^2$, $Tx = \{0, \frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \dots\}$, 试证明和计算:

- (i) T 是全连续算子;
- (ii) 求出 $\|T\|$ 和 $\sigma(T)$;
- (iii) 证明 $0 \in \sigma_r(T)$ 。

42. 设 H 是实 Hilbert 空间, $T \in \mathcal{B}(H)$, 若对一切 $x \in H$, 有

$$(Tx, x) \geq a(x, x)$$

其中 a 为大于零的常数, 则 $T^{-1} \in \mathcal{B}(H)$, 且 $\|T^{-1}\| \leq a^{-1}$ 。

43. 设 H 是 Hilbert 空间, G 为 H 的真闭子空间, 则存在 $y \in H$, $\|y\| = 1$, 使得

$$\rho(y, G) = \inf_{z \in G} \|y - z\| \geq 1$$

44. 设 $l^2(T) = \{a(t): a(t) \text{ 是定义在 } T \text{ 上的复值函数, 至多有可数个点使 } a(t) \neq 0, \text{ 且 } \sum_t |a(t)|^2 < \infty\}$, 在 $l^2(T)$ 中线性运算与通常的函数空间相同, 定义内积如下:

$$(a(t), b(t)) = \sum_t a(t) \overline{b(t)}$$

若 $T = [0, 1]$, 试证明 $l^2(T)$ 是不可分的完备内积空间。

提示 关于 $l^2(T)$ 的不可分性, 考察

$$M = \{a_\alpha(t): \alpha \in [0, 1], a_\alpha(\alpha) = 1, t \neq \alpha \text{ 时}, a_\alpha(t) = 0\}$$

45. 设 X_1, X_2 和 X 均为赋范线性空间, 称 $\varphi: X_1 \times X_2 \rightarrow X$ 为双线性映射, 若 φ 满足

$$\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y); \varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y);$$

$$\varphi(x, y_1 + y_2) = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2); \varphi(x, \lambda y) = \lambda \varphi(x, y).$$

称 $\varphi: X_1 \times X_2 \rightarrow X$ 是半双线性映射, 若 φ 满足

$$\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y); \varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y);$$

$$\varphi(x, y_1 + y_2) = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2); \varphi(x, \lambda y) = \overline{\lambda} \varphi(x, y).$$

特别地, 若 $X = C$, 则分别称 φ 为 $X_1 \times X_2$ 上的双线性型和半双线性型。

设 $\varphi: X_1 \times X_2 \rightarrow X$ 是双线性映射, 对每个 $x \in X_1$, $\varphi_x(y) = \varphi(x, y)$ 关于 y 是连续的, 对每个 $y \in X_2$, $\varphi^y(x) = \varphi(x, y)$ 关于 x 是连续的, 又若 X_1 或 X_2 完备, 则 φ 是有界的 (即存在 $M > 0$, 使对一切 $x \in X_1, y \in X_2$, 有 $\|\varphi(x, y)\| \leq M \|x\| \cdot \|y\|$)。

46. 设 X_1, X 为赋范线性空间, $X_2 = X^*, T \in \mathcal{B}(X_1, X), f \in X^*$, 令 $\phi_T(x, f) = f(Tx)$, 则 $\phi_T(x, f)$ 是 $X_1 \times X_2$ 上的有界双线性型, 试证明

$$(i) \|\phi_T\| = \|T\|$$

$$(这里 \|\phi_T\| = \sup \{ |\phi_T(x, f)| : \|x\| \leq 1, \|f\| \leq 1 \});$$

(ii) 映射 $l: T \rightarrow \phi_T$ 是 $\mathcal{B}(X_1, X_2) \rightarrow \mathcal{B}(X_1, X_2; C)$ 中的等距线性映射, 这里 $\mathcal{B}(X_1, X_2; C)$ 表示 $X_1 \times X_2$ 上的有界双线性型全体;

(iii) 若 X 自反, 则映射 $l: T \rightarrow \phi_T$ 是满射的。

47. 设 X_1, X_2 为赋范线性空间, X 是 Banach 空间, 则 $\mathcal{B}(X_1, X_2; X)$ 也是 Banach 空间。

48. 设 U 为内积空间, 令 $\phi_T(x, y) = (Tx, y)$, 其中

$T \in \mathscr{B}(U)$, 则 $\|\phi_T\| = \|T\|$.

49. 设 H 是 Hilbert 空间, 对 $H \times H$ 上的任一有界半双线性型 $\varphi(x, y)$, 必存在唯一的 $T \in \mathscr{B}(H)$, 使对一切 $x, y \in H$, 有

$$\varphi(x, y) = (Tx, y)$$

且

$$\|\varphi\| = \|T\| = \|\phi_T\|$$

其中 $\phi_T(x, y) = (Tx, y)$.

50. 设 H 为 Hilbert 空间, $T \in \mathscr{B}(H)$, T 正常, 则存在酉算子 U , 使 $T^* = UT$.

提示 利用正常算子性质, 先作 $R(T) \rightarrow R(T^*)$ 上的算子 $U: UTx = T^*x$, 由此可得本题结论.

[注] 本题可改为: 若 $S, T \in \mathscr{B}(H)$, 对一切 $x \in H$, 有 $\|Sx\| = \|Tx\|$, 则存在酉算子 U , 使 $S = UT$.

51. 设 H 为 Hilbert 空间, $T \in \mathscr{B}(H)$, $R(T) = H$, 试证明存在常数 $\alpha > 0$, 使得对一切 $x \in H$, 有

$$\|T^*x\| \geq \alpha \|x\|$$

提示 令 $J = \{x \in H: \|T^*x\| \leq 1\}$, 并作 H 上的有界线性泛函

$$f_\bullet(y) = (y, x) \quad (y \in H)$$

应用共鸣定理证明存在常数 $K > 0$, 使得

$$\sup_{x \in J} \|f_\bullet\| \leq K$$

从而可得, 对一切 $y \in H$, 成立

$$\|T^*y\| \geq \frac{1}{K} \|y\|$$

52. 设 H 为 Hilbert 空间, $T \in \mathscr{B}(H)$ 为单侧移位算子, $Te_k = e_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, 其中 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 H 的完备标

准直交基。若 N 是 H 的闭子空间， N 约化算子 T ，则 $N = \{0\}$ 或者 $N = H$ 。

提示 设 $N \neq \{0\}$ ，令 m 是 $y \neq 0$ ， $y = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \in N$ 中使 $\lambda_k \neq 0$ 的最小指标，证明 $m = 1$ 。

53. 设 H 为 Hilbert 空间， $\lambda \in \mathbb{C}$ ，则下列条件等价 (H 换成 Banach 空间 X 也成立)：

- (i) $\lambda \in \sigma_0(T)$ ；
- (ii) 存在算子序列 S_n ， $\|S_n\| = 1$ ，使 $\|(T - \lambda I)S_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)。

54. 设 F 是复平面 \mathbb{C} 上的任一非空有界闭集， $\{e_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) 是 H 的正规正交基，则存在一个正常算子 T ，使得

- (i) $\alpha(T) = F$ ；
- (ii) $\lambda \in F \Leftrightarrow \lambda \in \sigma_0(T)$ 。

提示 取 F 的一个可数稠子集 $\{\mu_n\}$ ，作 $T \in \mathcal{B}(H)$ 如下：

$$Te_n = \mu_n e_n \quad n = 1, 2, \dots$$

55. 设 H 为 Hilbert 空间， $T \in \mathcal{B}(H)$ ， $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ ，如果 $|z| < r$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n T^n$ 在 H 上处处收敛。

提示 实际上利用题设条件可以证明 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot \|T^n\|$ 收

敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n T^n$ 按算子范数收敛。

附录 南京大学攻读硕士学位研究生 入学考试实变函数试题选解

1981—1985年

试 题

1. 设 E 为有界可测集, $mE > 0$, 证明对于任何 $0 < q < mE$, 存在 E 的可测子集 e , 使 $me = q$ (还可以讨论 E 为无界集的情形)。

2. 设 E 为可测集, $mE < +\infty$, 则 E 上可测函数 $f(x)$ 可积的充要条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| mE_n < +\infty$$

其中 $E_n = \{x \in E: n-1 \leq f(x) < n\}$ 。

3. 对于实数 A , 用 $[A]$ 表示不超过 A 的最大整数, 设 $f(x)$ 在有限区间 $[a, b]$ 上可积, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_a^b [nf(x)] dx = \int_a^b f(x) dx$$

($[nf(x)]$ 的可测性不必证明。)

4. 设 $f(x)$ 在有限区间 $[a, b]$ 上连续, $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上围变, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上围变。

5. 设 A, B, C 为 $R = (-\infty, \infty)$ 上三个非空互不相交的有界闭集, 试证存在一个于 R 上连续的函数 $f(x)$ 满足

$0 \leq f(x) \leq 1$, 且 $f(A) = 0$, $f(B) = \frac{1}{2}$, $f(C) = 1$

6. 设 R 为实数加群, φ 为 R 上复值连续映射, 满足

$$|\varphi(x)| = 1 \quad (x \in R)$$

且 $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$, $(x, y \in R)$, 试证存在 $u \in R$, 使

$$\varphi(x) = e^{iux} \quad (x \in R)$$

7. 函数 $f(x)$ 在康托 (Cantor) 集 P_0 的点上等于 10, 而在 P_0 的具有长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的余区间上等于 $\frac{1}{2^n}$.

(1) 证明 $f(x) \in L^p[0, 1]$ ($1 \leq p < +\infty$);

(2) 计算 $(L) \int_0^1 f(x) dx$.

8. 试用叶果洛夫定理证明有界收敛定理, 即若 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的一串一致有界的可测函数, 且在 E 上 $f_n(x)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx$$

9. 是非题与填充题

(1) 设 $1 \leq p < q < \infty$, 则 $L^q(R) \subset L^p(R)$ 或 $L^p(R) \subset L^q(R)$ 两式必有一成立, 这里 $R = (-\infty, \infty)$. (是非题)

(2) 设 $f \in L^\infty(R)$, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, a 为实数, 则 $F(x)$ 几乎处处有有限导数. (是非题)

(3) 康脱 (G. Cantor) 三分集可用来说明 (只须列出三件事). (填充题)

10. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的平方可积函数且存在 $\alpha > 0$ 满足

$$\|f(x+h) - f(x)\|_2 = o(h^{1+\alpha}), \quad h \rightarrow 0$$

试证 $f(x)$ 几乎处处为常数。

11. 设 F 是 R^2 中闭集, 则对几乎所有 $x \in F$, 有

$$\rho(x+h, F) = o(|h|), \quad h \rightarrow 0, \quad h \in R^2$$

其中 $\rho(Z, F)$ 表示点 Z 到集 F 的距离。

12. 设 $f \in L^p(R)$, 则对任何 $p_1, p_2, p_1 < p < p_2$, 恒有

$$f \in L^{p_1}(R) + L^{p_2}(R)$$

这里 $S_1 + S_2 = \{\varphi_1 + \varphi_2: \varphi_1 \in S_1, \varphi_2 \in S_2\}$ 。并给出这种分解的一个应用 (不要论证)。

13. 设 $f(z)$ 为复平面上的解析函数, 且无零点, A 为复平面上的紧集, $\{W_n\}$ 为收敛于 0 的点列, 考虑复数集 $E_n = [f(A)]^{-1}W_n[f(A)]$, 这里两集 X 与 Y 的“积”定义为 $XY = \{xy: x \in X, y \in Y\}$, xy 为复数乘积; X 的“逆”定义为 $X^{-1} = \{x^{-1}: x \in X\}$ 。试证, 把 E 看成平面点集时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} mE_n = 0$$

14. 设 $E = (0, 1)$, f, g 为 E 上非负可测函数, 满足,

$$f(x)g(x) \geq x^{-1} \quad a.e$$

试证

$$\int_E f(x) dm \int_E g(x) dm \geq 2$$

并问等号可否成立?

15. 令 $F(x) = \frac{1}{2x} \int_{a-x}^{a+x} f(t) dt$, 其中 $f \in L(-\infty, \infty)$,

且 $\int_{-\infty}^{\infty} f dm \neq 0$, $a \in (-\infty, \infty)$, 试证 $F \in L(-\infty, \infty)$ 。

16. 令 $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, 考虑集

$$E_\alpha = \{Z + \alpha Z\}$$

问 (i) 当 α 为无理数时, E_α 有何性质?

(ii) 要求 E_α 为闭集, α 应如何?

(iii) 求 $\bigcup_{\alpha \in P} E_\alpha$ 的测度, 这里 P 表示 $[0, 1]$ 中的 Cantor 集。

17. 设 $f \in \overline{L^p}(-\infty, \infty)$, 这里 $p \geq 1$, 试作出函数列 f_n , $n = 1, 2, \dots$, 满足下列条件:

$$\|f_n\|_{p'} = 1, \quad \text{这里 } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f_n(x) dx = \infty$$

18. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的实可测函数, 若 f 又有周期 1, 试证 $f(x)$ 几乎处处为常数. 这样的函数是否必为常数。

解 答

1. 解

设 $a = \inf_{x \in E} x$, $b = \sup_{x \in E} x$, 则 $E \subset [a, b]$, 令

$$E_x = [a, x] \cap E, \quad a \leq x \leq b$$

则 $f(x) = mE_x$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 事实上,

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| = |mE_{x+\Delta x} - mE_x| \leq |\Delta x|$$

所以, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $f(x + \Delta x) \rightarrow f(x)$.

又因为

$$f(a) = 0, \quad f(b) = mE$$

由连续函数的介值定理, 当 $0 < q < mE$ 时, 必有 $x_1 \in [a, b]$, 使

$$f(x_1) = q$$

令 $e = [a, x_1] \cap E$, 则

$$e \subset E, me = q$$

若 E 为无界集, 可作

$$f(x) = m([-x, x] \cap E), (0 \leq x < \infty)$$

则 $f(x)$ 为 $[0, \infty)$ 上的增函数, 且

$$f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = mE$$

于是对任何 $0 < q < mE$, 必存在 $X > 0$, 使

$$q < f(X) < mE$$

令 $E_1 = [-X, X] \cap E$, E_1 为有界可测集, 于是存在 $e \subset E_1 \subset E$, 使 $me = q$.

2. 证

本题的 $f(x)$ 是几乎处处有限的, 否则充分性不成立. 在这样的条件下, 有

$$\int_E |f(x)| dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f(x)| dm + \sum_{n=0}^{-\infty} \int_{E_n} |f(x)| dm$$

当 $n \geq 1$ 时,

$$(n-1)mE_n \leq \int_{E_n} |f(x)| dm \leq n \cdot mE_n$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot mE_n - mE &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot mE_n - \sum_{n=1}^{\infty} mE_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)mE_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f(x)| dm \leq \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot mE_n \end{aligned}$$

当 $n \leq 0$ 时,

$$|n| \cdot mE_n \leq \int_{E_n} |f(x)| dm \leq |n-1| \cdot mE_n$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{-\infty} |n| \cdot mE_n &\leq \sum_{n=0}^{-\infty} \int_{E_n} |f(x)| dm \\ &\leq \sum_{n=0}^{-\infty} (|n| + 1) mE_n \leq \sum_{n=0}^{-\infty} |n| \cdot mE_n + mE \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| \cdot mE_n - mE &\leq \int_E |f(x)| dm \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| \cdot mE_n + mE \end{aligned}$$

因为 $mE < \infty$, 所以 $f(x)$ 在 E 上可积的充分必要条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| \cdot mE_n < \infty$$

3. 证

$$\begin{aligned} \text{因为 } \left| \frac{1}{n} [nf(x)] \right| &\leq \frac{1}{n} (|nf(x)| + 1) \\ &\leq |f(x)| + 1 \in L[a, b] \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} [nf(x)] - f(x) \right| &= \frac{1}{n} |[nf(x)] - nf(x)| \\ &\leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [nf(x)] = f(x)$$

由勒贝格控制收敛定理, 有

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_a^b [nf(x)] dx &= \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [nf(x)] dx \\ &= \int_a^b f(x) dx\end{aligned}$$

4. 证

由题设

$$\bigvee_a^b |f| = \sup \sum_{k=1}^n \left| |f(x_k)| - |f(x_{k-1})| \right| < \infty$$

对 $[a, b]$ 的任一分法 T ,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

令 $V_T(f) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ 表示 $f(x)$ 对应于分法 T

的变差。

若 $f(x_k)$ 与 $f(x_{k-1})$ 不是异号, 则

$$\left| |f(x_k)| - |f(x_{k-1})| \right| = |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

若 $f(x_k)$ 与 $f(x_{k-1})$ 异号, 则由连续性, 存在一点 $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$, 使 $f(\xi_k) = 0$, 于是

$$\begin{aligned}|f(x_k) - f(x_{k-1})| &= |f(x_k) - f(\xi_k)| + |f(\xi_k) - f(x_{k-1})| \\ &= \left| |f(x_k)| - |f(\xi_k)| \right| + \left| |f(\xi_k)| - |f(x_{k-1})| \right|\end{aligned}$$

对每个在端点上函数值异号的区间 (x_{k-1}, x_k) , 加进使 $f(\xi_k) = 0$ 的点 ξ_k , 这样对应的分法 T 就成了一个新的分法 T' , 此时

$$V_T(f) = V_{T'}(|f|) \leq \bigvee_a^b (|f|) < \infty$$

由于 T 是 $[a, b]$ 的任一分法, 得

$$\bigvee_a^b(f) \leq \bigvee_a^b(|f|) < \infty$$

[注] 另一方面, 对任一分法 T , 恒有

$$\sum_{k=1}^n \left| |f(x_k)| - |f(x_{k-1})| \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

于是

$$\bigvee_a^b(|f|) \leq \bigvee_a^b(f)$$

由此可见, 对于连续函数 $f(x)$, 有 $\bigvee_a^b(f) = \bigvee_a^b(|f|)$ 成立。

5. 证

令 $\rho(x, E)$ 为 x 到集 $E \subset R$ 的距离, 则 $\rho(x, E)$ 为 x 的非负连续函数($x \in R$)。 令

$$f(x) = \frac{\rho(x, A \cup B) + \rho(x, A \cup C)}{\rho(x, A \cup B) + 2\rho(x, A \cup C) + \rho(x, B \cup C)}$$

注意到 A, B, C 是互不相交的非空有界闭集, 即可知 $f(x)$ 在 R 上连续, 满足 $0 \leq f(x) \leq 1$, 且当 $x \in A$ 时, $f(x) = 0$, $x \in B$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}$, $x \in C$ 时, $f(x) = 1$ 。

6. 证

在 $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$ 中, 令 $x=0$ 得 $\varphi(0)=1$, 又 φ 为连续函数, 故必存在 $h>0$, 使

$$\int_0^h \varphi(t) dt = c \neq 0$$

于是

$$\varphi(x) = \frac{1}{c} \varphi(x) \int_0^h \varphi(t) dt = \frac{1}{c} \int_0^h \varphi(x)\varphi(t) dt$$

$$= \frac{1}{c} \int_0^b \varphi(x+t) dt = \frac{1}{c} \int_0^{x+b} \varphi(t) dt$$

由此可见, $\varphi(x)$ 有连续的导数 $\varphi'(x)$.

在等式 $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$ 两边对 y 求导, 并令 $y=0$, 得

$$\varphi'(x) = \varphi'(0)\varphi(x)$$

解此方程得

$$\varphi(x) = e^{ux} \quad (u \in R)$$

7. 证

(1) 因为

$$\begin{aligned} (L) \int_0^1 |f(x)|^p dx &= 10^p \cdot mP_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} \left(\frac{1}{2^n} \right)^p \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{np}} < \infty \end{aligned}$$

所以

$$f(x) \in L^p[0,1] \quad (1 \leq p < \infty)$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (L) \int_0^1 f(x) dx &= 10 \cdot mP_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} \cdot \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

8. 证

本题应有条件 $mE < \infty$, 且不妨设 $mE > 0$ (否则结论显然成立)。

设 $|f_n(x)| \leq M$, $n=1,2,\dots$, $x \in E$, 则 $|f(x)| \leq M$ 在 E 上 a.e 成立。

任给 $\varepsilon > 0$, 由叶果洛夫定理, 存在 $E_\varepsilon \subset E$, 使

$$m(E - E_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{4M}$$

而在 E_ε 上, $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$. 因为

$$\begin{aligned} & \left| \int_E f_n(x) dx - \int_E f(x) dx \right| \\ & \leq \int_{E_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| dx + \int_{E - E_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| dx \end{aligned}$$

在 $E - E_\varepsilon$ 上, 几乎处处有 $|f_n(x) - f(x)| \leq 2M$, 所以

$$\int_{E - E_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| dx \leq 2M \cdot m(E - E_\varepsilon)$$

$$< 2M \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon/2$$

在 E_ε 上, 由 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$ 知, 存在 N , 使当 $n > N$

时, 对一切 $x \in E_\varepsilon$, 有 $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2mE}$, 所以

$$\int_{E_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2mE} mE = \frac{\varepsilon}{2}$$

于是当 $n > N$ 时

$$\left| \int_E f_n(x) dx - \int_E f(x) dx \right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx$$

9. 解

(1) 结论不成立。例如

$$\text{当 } f(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x \leq 1 \\ x^{-\frac{1}{2}} & x > 1 \end{cases}$$

$f \in L^1(R)$, 但 $f \notin L^2(R)$,

$$\text{当 } f(x) = \begin{cases} 0 & \infty < x \leq 0 \text{ 或 } x > 1 \\ x^{-\frac{1}{2}} & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$f \in L^2(R)$, 但 $f \notin L^1(R)$.

(2) 结论成立。事实上, 对任何包含 a 的区间 $[\alpha, \beta]$, 由 $f \in L^\infty[\alpha, \beta]$ 知 $f \in L[\alpha, \beta]$ 。于是 $F(x)$ 为 $[\alpha, \beta]$ 上的绝对连续函数, 从而 $F'(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上几乎处处存在且有限。由 $[\alpha, \beta]$ 的任意性知, $F'(x)$ 在 R 上几乎处处存在且有限。

(3) 康脱三分集可用以说明: 在 R 上势为 \aleph_1 的集的测度不一定大于 0; 完全集不一定包含任何区间; 无孤立点的集合不一定有内点。

10. 证

令 $\varphi(t) = \|f(x+t) - f(x)\|_2$, 任取 $l > 0$, 则由 $f(x)$ 的周期性得

$$\begin{aligned} \varphi(l) &= \|(f(x+l) - f(x))\| \\ &\leq \|f(x+l) - f(x + \frac{l}{2})\|_2 + \|f(x + \frac{l}{2}) - f(x)\|_2 \\ &= \|f(x + \frac{l}{2}) - f(x)\|_2 + \|f(x + \frac{l}{2}) - f(x)\|_2 \\ &= 2\varphi(\frac{l}{2}) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(l)}{l} &\leq \frac{2\varphi(\frac{l}{2})}{l} = \frac{\varphi(\frac{l}{2})}{l/2} \\ &\leq \frac{\varphi(\frac{l}{4})}{l/4} \leq \dots \leq \frac{\varphi(\frac{l}{2^n})}{l/2^n} \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 则 $\frac{l}{2^n} \rightarrow 0$. 由题设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi\left(\frac{l}{2^n}\right)}{l/2^n} = 0$$

因此 $\frac{\varphi(l)}{l} = 0$. 而 $l > 0$, 所以

$$\varphi(l) = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x+l) - f(x) \right]^2 dx \right\}^{1/2} = 0$$

于是

$$f(x+l) - f(x) \sim 0$$

由 l 的任意性, 得

$$f(x) \sim 0$$

11. 证

先设 F 为 R^2 中的有界集。

令 $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in F, \\ 0 & x \notin F, \end{cases}$ 则 $f \in L(R^2)$. 因此几乎所有的

$x \in R^2$ 为 $f(x)$ 的勒贝格点. 因此, 对几乎所有的 $x \in R^2$ 有

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{mB(x, r)} \int_{B(x, r)} f(y) dy = f(x)$$

其中 $B(x, r)$ 表示 R^2 中的以 x 为中心, r 为半径的圆. 于是对几乎所有的 $x \in F$, 有

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m\{F \cap B(x, r)\}}{mB(x, r)} = 1 \quad (1)$$

成立. 可以证明若 $x \in F$ 且满足 (1), 则对任何 $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1$), 当 h 充分小时, 存在 $y \in F \cap B(x+h, \varepsilon|h|)$. 事实上, 若此论断不对, 则对任何 $\delta > 0$, 必有 $0 < |h| < \delta$, 使

$$F \cap B(x+h, \varepsilon|h|) = \emptyset$$

从而有

$$\begin{aligned} & \frac{m\{F \cap B(x, |h| + \varepsilon|h|)\}}{mB(x, |h| + \varepsilon|h|)} \\ & \leq \frac{mB(x, |h| + \varepsilon|h|) - mB(x+h, \varepsilon|h|)}{mB(x, |h| + \varepsilon|h|)} \\ & = 1 - \frac{\pi \varepsilon^2 |h|^2}{\pi(1+\varepsilon)^2 |h|^2} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2} < 1 \end{aligned}$$

此与(1)式相矛盾。于是有

$$\rho(x+h, F) \leq \rho(x+h, y) \leq \varepsilon|h|$$

由 ε 的任意性, 得

$$\rho(x+h, F) = o(|h|) \quad h \rightarrow 0, h \in R^2$$

若 F 为 R^2 中的无界闭集, 则总可将 F 分成可列个有界闭集的并: $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. 对任何一个 i , 对几乎所有的 $x \in F_i$, 有

$$\rho(x+h, F) \leq \rho(x+h, F_i) = o(|h|) \quad h \rightarrow 0$$

于是对几乎所有的 $x \in F$, 有

$$\rho(x+h, F) = o(|h|) \quad h \rightarrow 0$$

12. 证

对 $f \in L^p(R)$, 令 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, 其中

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{cases} f(x) & \text{当 } |f(x)| > 1 \\ 0 & \text{当 } |f(x)| \leq 1 \end{cases} \\ f_2(x) &= \begin{cases} f(x) & \text{当 } |f(x)| \leq 1 \\ 0 & \text{当 } |f(x)| > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\int_R |f_1(x)|^{p_1} dx &= \int_R |f_1(x)|^p |f_1(x)|^{p_1-p} dx \\ &\leq \int_R |f(x)|^p dx < \infty \\ \int_R |f_2(x)|^{p_2} dx &= \int_R |f_2(x)|^p |f_2(x)|^{p_2-p} dx \\ &\leq \int_R |f(x)|^p dx < \infty\end{aligned}$$

应用这种分解, 可以证明如下定理: 如果 $1 < r \leq \infty$, T 是一个从 $L^1(R) + L^r(R)$ 到可测函数空间上的半可加映射, 且 T 是弱 $(1,1)$ 型, 弱 (r,r) 型的, 则对任何 $1 < p < r$, T 是 (p,p) 型的。

13. 证

由题设条件, 可令

$$M = \max_{z \in A} |f(z)| \quad m = \min_{z \in A} |f(z)|$$

且有 $0 < m \leq M < \infty$, 于是对任何 $w \in E_n$, 有

$$|w| \leq \frac{M}{m} |w_n|$$

故

$$mE_n \leq \pi \left(\frac{M}{m} \right)^2 |w_n|^2$$

由 $|w_n| \rightarrow 0$, 得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} mE_n = 0$$

14. 证

由 Hölder 不等式

$$\int_E (x^{-1})^{\frac{1}{2}} dx \leq \int_E [f(x)g(x)]^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\leq \left(\int_E f(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_E g(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

而

$$\int_E x^{-\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2$$

所以

$$\int_E f(x) dx \int_E g(x) dx \geq 4 > ?$$

显然等号不会成立。

15. 证

设 $\left| \int_{-\infty}^{\infty} f dm \right| = l > 0$, 则存在 $N > 0$, 使当 $x > N$ 时

$$\left| \int_{a-}^{a+} f(t) dm \right| > \frac{l}{2}$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |F| dm &\geq \int_N^{\infty} \frac{1}{x} \left| \int_{a-}^{a+} f(t) dm \right| dm \\ &\geq \frac{l}{2} \int_N^{\infty} \frac{1}{x} dm = \infty \end{aligned}$$

16. 解

(i) 当 α 为无理数时, 则 E_α 为 R 上的可数稠密集。可数性是显然的, 下证稠密性。即证, 对任何 $x \in R, \delta > 0$, 存在 $a, b \in Z$, 使

$$a + b\alpha \in (x - \delta, x + \delta)$$

任取正整数 m , 使 $\frac{1}{10^m} < \delta$, 在集合 $\{n\alpha; n = 1, 2, \dots\}$

中, 至少有两个数 $n_1\alpha, n_2\alpha$, 它们的前 m 个小数位上的数字相同。若 $n_1\alpha - n_2\alpha$ 的整数部分为 k , 则

$$|n_1\alpha - n_2\alpha - k| < \frac{1}{10^m} < \delta$$

又因 α 为无理数, 所以

$$n_1\alpha - n_2\alpha - k \neq 0$$

设 $|(n_1 - n_2)\alpha - k| = N\alpha + K$, $K, N \in \mathbb{Z}$, 则

$$0 < K + N\alpha < \delta$$

于是存在 $S \in \mathbb{Z}$, 使

$$x - \delta < S(K + N\alpha) < x + \delta$$

令 $a = SK$, $b = SN$, 则

$$a + b\alpha \in (x - \delta, x + \delta)$$

(ii) 当且仅当 α 为有理数时, E_α 为闭集。事实上:

当 α 为无理数时, 由 (i) $\overline{E_\alpha} = \mathbb{R} \neq E_\alpha$, 故 E_α 非闭。当 α 为有理数时, 若 $\alpha = 0$, 则 $E_\alpha = \mathbb{Z}$, 若 $\alpha \neq 0$, 令 $\alpha = \frac{p}{q}$, q 为正整数, $p \in \mathbb{Z}$, 且 p, q 互质, 则

$$E_\alpha = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}} \left\{ a + \frac{1}{q}, a + \frac{2}{q}, \dots, a + \frac{q-1}{q} \right\}$$

可见当 α 为有理数时, E_α 无聚点。于是 $\overline{E_\alpha} = E_\alpha$, 故 E_α 为闭集。

(iii) 首先 $\bigcup_{\alpha \in P} E_\alpha = \bigcup_{a, b \in \mathbb{Z}} (a + bP)$, 事实上,

$$x \in \bigcup_{\alpha \in P} E_\alpha \Leftrightarrow \text{存在 } a, b \in \mathbb{Z}, \alpha_0 \in P,$$

$$\text{使 } x = a + b\alpha_0 \Leftrightarrow x \in \bigcup_{a, b \in \mathbb{Z}} (a + bP)$$

于是

$$m\left(\bigcup_{\alpha \in P} E_\alpha\right) \leq \sum_{a, b \in \mathbb{Z}} m(a + bP) = 0$$

17. 解

当 $p > 1$ 时, 令 $a_n = \int_{-n}^n |f|^p dx$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_{-\infty}^{\infty} |f|^p dx = \infty$$

又令

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{|f|^{\frac{1}{p'}+1} \operatorname{sgn} f}{a_n^{1/p'}} & x \in (-n, n) \\ 0 & x \notin (-n, n) \end{cases}$$

则 $\|f_n\|_{p'}^{p'} = 1$, 且

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n^{1/p}} \int_{-n}^n |f|^p dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/p} = \infty \end{aligned}$$

当 $p = 1$ 时, 令 $f_n(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} f(x) & x \in (-n, n) \\ 0 & x \notin (-n, n) \end{cases}$

则 $\|f_n\|_{\infty} = 1$, 且

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n |f(x)| dx \\ &= \|f\|_1 = \infty \end{aligned}$$

18. 证

(i) 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, \infty)$ 上的连续函数。令

$$E_0 = \{2k\pi + 1; k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

则 $f(x)$ 在 E_0 上为常数。由本附录第 16 题知, E_0 在 $(-\infty,$

∞)上稠密。由 $f(x)$ 的连续性知, $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上恒为常数。

(ii) 设 $f(x)$ 在任一有穷区间上 L 可积, 令

$$f_h(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(s) ds = \frac{1}{h} \int_0^h f(x+s) ds$$

则对任何一个 $h > 0$, $f_h(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上连续, 又因 $f(x)$ 以 1 为周期, 所以

$$\begin{aligned} f_h(x+1) &= \frac{1}{h} \int_0^h f(x+1+s) ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h f(x+s) ds = f_h(x) \end{aligned}$$

即 $f_h(x)$ 亦以 1 为周期。同理, $f_h(x)$ 亦以 2π 为周期, 由(i)得 $f_h(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上恒为常数。

因 $f(x)$ 在任何有穷区间上 L 可积, 所以 $\lim_{h \rightarrow \infty} f_h(x) = f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上几乎处处成立。于是 $f(x)$ 在

$(-\infty, \infty)$ 上几乎处处为常数。

(iii) 设 $f(x)$ 为实可测函数, 令

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & |f(x)| \leq n \\ n & |f(x)| > n \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

则对每个 n , $f_n(x)$ 在任一有穷区间上 L 可积, 且以 1 和 2π 为周期。由(ii)得, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上几乎处处等于常数。设 E_n 是使 $f_n(x)$ 等于常数的点集, 则 $m \mathcal{C} E_n = 0$ 。

令 $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, 则 $m \mathcal{C} E = 0$, 在 E 上, 每个 $f_n(x)$ 都为常

数。又 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, 故 $f(x)$ 在 E 上为

常数, 即 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上几乎处处为常数。

以上的 $f(x)$ 不一定为常数。例如, 设

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in E_0 \\ 0 & x \in \overline{E_0} \end{cases}$$

其中 $E_0 = \{2k\pi + l: k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, 则 $f(x)$ 是以 1 和 2π 为周期的实可测函数, 但非常数。

参考文献

- [1] 郑维行、王声望, 实变函数与泛函分析概要
(第一册)
- [2] 郑维行、王声望, 实变函数与泛函分析概要
(第二册)
- [3] 夏道行、严绍宗、吴卓人、舒五台编, 实变函数与泛函分析(上、下册)
- [4] 程其襄等编, 实变函数与泛函分析基础
- [5] [苏]A.Б.安托理维奇, П.Н.克尼亚泽夫,
Я.В.提迪诺著, 泛函分析习题集(赵根榕译)
- [6] 关肇直, 泛函分析讲义, 高等教育出版社,
(1959)
- [7] I. J. Maddox, *Elements of functional
analysis*, 1978
- [8] E. Kreyszin, *Introductory functional
analysis with applications*, 1980
- [9] S. K. Berberian, *Introduction to Hilbert
space*, 1961

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]

□ □ = □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

□ □ = □ □ □ □ □ □ □

□ □ = 2 9 9

S S □ = 1 0 8 3 2 9 6 8

□ □ □ □ = 1 9 8 8 □ 0 6 □ □ 1 □

